立航數學

三角

1-1 直角三角形的邊角關係

銳角三角函數
函數值計算
三角恆等式

1-2 廣義角與極坐標

廣義角
廣義角三角函數
函數值應用
極坐標

1-3 正弦定理、餘弦定理

正弦定理
餘弦定理
三角形性質

1-4 差角公式

和角公式
二倍角公式
三倍角公式
優等生園地

1-5 三角測量

基本型三角測量
方位型三角測量
立體型三角測量
應用

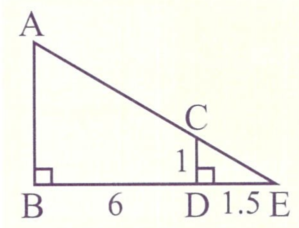
講道理　道理說清楚，就是好的開始

在國三下數學第一章，我們利用相似Δ的比例性質，學過一些測量樹高與河寬的方法，現在來回顧其中一個例子，以便瞭解三角函數的基本意義，請！

測量高度

某人為了要測量樹高$\overline{AB}$，於離樹根 6 公尺的 D 點處打了一根標竿，並在$\overline{BD}$的延長線上找到一點 E，使 A、C、E 三點成一直線。已知$\overline{CD}=1$公尺，又測得$\overline{DE}$為 1.5 公尺，求樹高$\overline{AB}$。

立航心得語



【解析】▶根據題意，繪出圖形。

已經量出來的長度有三個（如圖所示）

那麼，可由相似Δ的性質

得出比例式 $\dfrac{\overline{AB}}{1}=\dfrac{7.5}{1.5}$

$\therefore$ 樹高$\overline{AB}$為5公尺

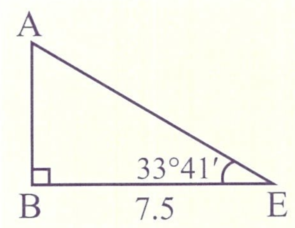
進階思考

在這題中，為了測量樹高而大費周章量出三個長度，再利用邊長比例計算，似乎太麻煩。其實我們可以發現在直角三角形中，只要確定一個銳角，則其邊長比例可隨之確定，進一步來說，如果我們建立一個表，詳細列出每一角度所決定的邊長比例值，那麼，測量工作就不需要太複雜的程序了，請！

三角函數

在前題中，若某人已量出$\overline{BE}=7.5$公尺，又量出在 E 看樹頂 A 的仰角為 $33°41'$。此時，某人在三角函數表中查得 $\tan 33°41'$ 之值為 0.6666，求樹高$\overline{AB}$。

立航心得語



【解析】▶由三角函數的定義知$\tan\theta=$對邊／鄰邊

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{7.5}=\tan 33°41'=0.6666$

$\therefore$ 樹高$\overline{AB}$為5公尺

講道理　道理說清楚，就是好的開始

在前頁的例子中，我們瞭解三角函數就是

直角三角形中的邊長比例

可表示如下，請！

立航心得語

cot A = ______

sec A = ______

csc A = ______

銳角三角函數的定義

設 ΔABC 為直角三角形，$\angle C = 90°$，則規定

$\angle A$ 的正弦 $= \sin A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

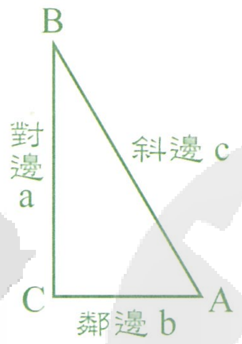
$\angle A$ 的餘弦 $= \cos A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$

$\angle A$ 的正切 $= \tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

$\angle A$ 的餘切 $= \cot A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}$

$\angle A$ 的正割 $= \sec A = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}$

$\angle A$ 的餘割 $= \csc A = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}$



1. 設直角三角形 ΔABC 中，$\angle C = 90°$，若 $a - b = \dfrac{c}{4}$，求 $\tan A$ 之值。

立航心得語

tan A = ______

【答案】▶ $\dfrac{16+\sqrt{31}}{15}$

【解析】▶

隨堂試試

設直角三角形 ΔABC 中，$\angle C = 90°$

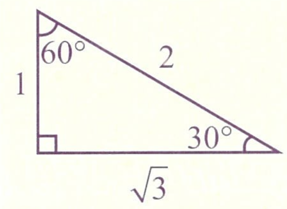
①若 $\sin A = \dfrac{3}{5}$，$c = 200$，求 a,b 之值。

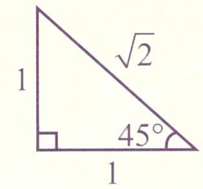
②若 $a + b = \dfrac{7}{5}c$，求 $\sin A$ 及 $\tan B$ 之值。

⇨① $a = 120$，$b = 160$　② $\sin A = \dfrac{3}{5}$ 或 $\dfrac{4}{5}$，$\tan B = \dfrac{3}{4}$ 或 $\dfrac{4}{3}$

	15°	30°	45°	60°	75°
$\sin\theta$	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$				$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$				$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
$\tan\theta$	$2-\sqrt{3}$				$2+\sqrt{3}$

立航心得小語





2. 設 $\theta=30^\circ$，$\phi=45^\circ$，則

(A) $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\cos\phi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\sec\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\cot\phi=1$　(D) $\csc\theta=2$，$\csc\phi=\sqrt{2}$

【答案】▶ (A)(C)(D)

【解析】▶

HOME WORK

3. 請化簡 $\dfrac{2\log(\tan 60^\circ)+\log(\tan 45^\circ)-3\log(\sin 30^\circ)+\log 5}{1+\frac{1}{2}\log 36+2\log(\sec 45^\circ)-2\log(\cot 45^\circ)}$

【答案】▶ 1

【解析】▶ 原式 $=\dfrac{2\log\sqrt{3}+\log 1-3\log\frac{1}{2}+\log 5}{1+\log 6+2\log\sqrt{2}-2\log 1}$

$=\dfrac{\log 3+3\log 2+\log 5}{\log 3+3\log 2+\log 5}=1$

隨堂試試

1. 求下列各式之值

① $\sin 30^\circ+\sin^2 30^\circ+\sin^3 30^\circ+\sin^4 30^\circ+\cdots$

② $1+\tan^2 30^\circ+\tan^4 30^\circ+\tan^6 30^\circ+\cdots$

⇨① 1　② $\dfrac{3}{2}$

2. $\cos 30^\circ\sin 60^\circ+\sec 60^\circ\csc 30^\circ+\tan 45^\circ\cot 45^\circ=$ ＿＿＿＿＿

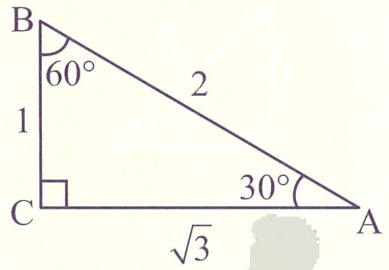
⇨ $\dfrac{23}{4}$

HOME WORK

4. 已知$30^\circ-60^\circ-90^\circ$直角三角形的邊長比為$2:1:\sqrt{3}$。
試利用這個性質，

證明：$\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos 75^\circ$

$\sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\cos 15^\circ$

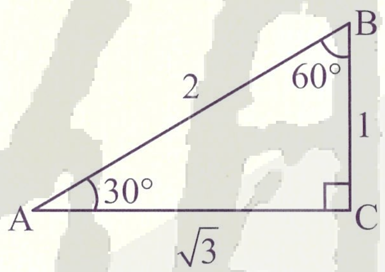


【證明】▶ 作∠A 的平分線交 BC 於 D 點

由角平分線定理 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ $\therefore \overline{CD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$

在ΔACD中，$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$

$\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$



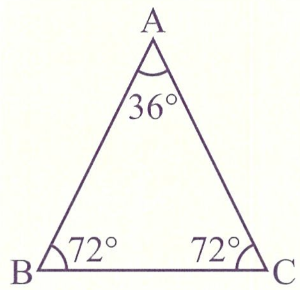
【另證】▶ 作 CA 之延長線$C-A-D$，且$\overline{AD}=\overline{AB}=2$

在ΔBCD中，$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\sin 15^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

已知$45^\circ-45^\circ-90^\circ$直角三角形的邊長比爲$1:1:\sqrt{2}$。試利用這個性質，證明：$\sin 22.5^\circ=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$，$\cos 22.5^\circ=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

5. 試利用圖形之相似Δ性質，求出$\sin 18^\circ$之值。



【答案】▶ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

【解析】▶

6. 設θ為銳角，且 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}$，求 $\dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta}+\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta}$ 之值。

立航心得語

欲求三角函數值

⇨定出直角三角形

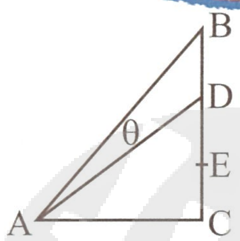
確認 對邊 ，鄰邊 ，斜邊

【答案】▶ $\dfrac{7}{5}$

【解析】▶ 由 $\tan\theta=\dfrac{3}{4}=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

故知 $\sin\theta=$ ______ ，$\cos\theta=$ ______ ，請！

7. 設直角三角形 ΔABC 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$，且 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，令 $\angle BAD=\theta$，試求 $\cos\theta$ 之值。



【答案】▶ $\dfrac{5}{26}\sqrt{26}$

【解析】▶

馬上試試

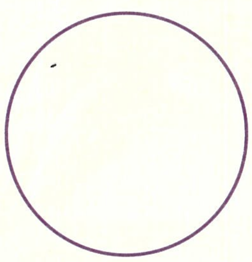
在等腰直角 ΔABC 中，$\angle C$ 為直角，D 是 $\overline{BC}$ 的中點，試求 $\tan(\angle BAD)$ 之值。

⇨ $\dfrac{1}{3}$

HOME WORK

8. 設 B、C 為線段 $\overline{AD}$ 之三等分點且 B 點較靠近 A，以 $\overline{BC}$ 為直徑作一圓在圓上取異於 B、C 之一點 P，令 $\angle APB=\alpha$，$\angle CPD=\beta$，則 $\tan\alpha\cdot\tan\beta$ 之值為何？

立航心得語



【答案】▶ $\dfrac{1}{4}$

【解析】▶ $\Delta ABE\approx\Delta ACP\quad\therefore\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CP}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

$\Delta DCF\approx\Delta DBP\quad\therefore\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}=\dfrac{1}{2}$

$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\boxed{\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BP}}}\cdot\boxed{\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CP}}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$