



何明

數學

Hormin math

108 指考複習教材 (數甲)

第二單元 三角與三角函數

第二主題 弧長與扇形面積

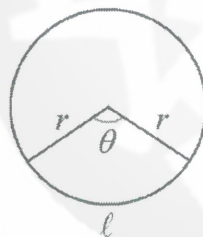
【理論說明】

(1) 弧長公式： $l = r \cdot \theta$ (l 表弧長， r 表半徑)

(2) 扇形面積 = $\frac{1}{2}r \cdot l = \frac{1}{2}r^2\theta$

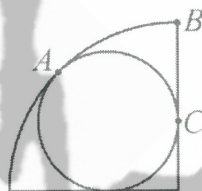
解：(1) $\frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{l}{\theta} \quad \therefore l = r \cdot \theta$

(2) $\frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{A}{\theta} \quad \therefore A = \frac{1}{2}r^2\theta$



《甲》 精選範例

1. 右圖為一個半徑為2的四分之一圓，內部有一內切圓，求 \widehat{AB} 與 \widehat{AC} 兩圓弧長之和為_____。

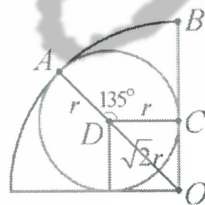


解： $\because \overline{AO} = 2 \quad \therefore r + \sqrt{2}r = 2 \quad \therefore r = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1)$

(1) $\angle ADC = \frac{3\pi}{4} \quad \therefore \widehat{AC} = r \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3(\sqrt{2}-1)\pi}{2}$

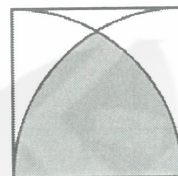
(2) $\angle AOB = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \widehat{AB} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \widehat{AB} + \widehat{AC} = \frac{\pi}{2} + \frac{3(\sqrt{2}-1)\pi}{2} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}\pi$

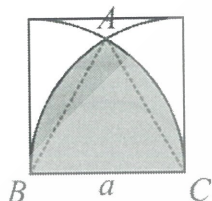


【即時重要演練題】

- A. 已知一正方形邊長為 a ，求陰影部分面積 _____。



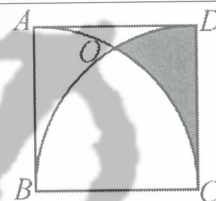
解：



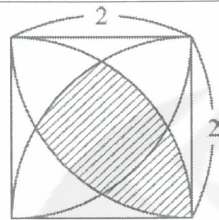
所求面積 = 兩扇形面積 - $\triangle ABC$ 面積

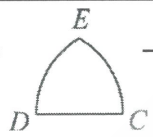
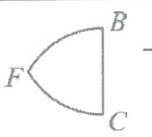
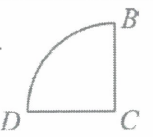
$$= 2\left(\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2$$

- B. 正方形 $ABCD$ 邊長為 1，各以 B, C 為圓心作半徑為 1 之弧，如圖，則陰影部分面積為 _____。



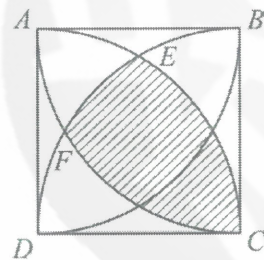
3. 如右圖所示，正方形邊長為2，
以各頂點為圓心，邊長2為半徑，在正方形內
各作圓弧，試求斜線區域的面積為_____。



解：所求 =  +  - 

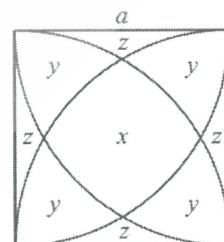
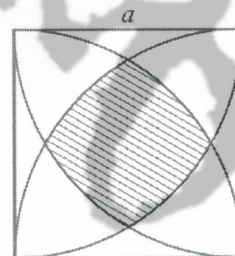
$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2^2 + \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= 2\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) - \pi = \frac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$



【即時重要演練題】

- A. 以邊長為 a 的正方形 $ABCD$ 各頂點為圓心，
 a 為半徑作圓。求四個圓在正方形內部交集區
域（即斜線區域）面積為_____。



《乙》 重要演練題

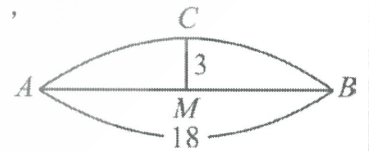
1. 已知扇形中心角為 60° ，則扇形面積與其內切圓之面積比為：_____。
(A) 3:2 (B) 2:1 (C) 4:3 (D) 5:3

答：(A)

2. 設一扇形之面積為 k ，則當中心角等於 θ 弧度時有最小之周界 m ，則
(A) $\theta=2$ (B) $\theta=3$ (C) $m=3\sqrt{k}$ (D) $m=4\sqrt{k}$

答：(A)(D)

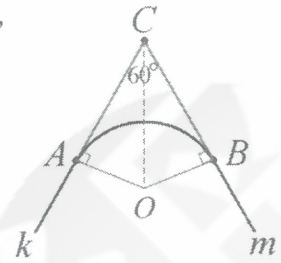
3. 如右圖，弓形 ACB 的弦 $\overline{AB}=18$ ，弧 ACB 的長為 24，
弧中點 C 與弦 \overline{AB} 的中點 M 之距離為 3，
則弓形 ACB 的面積為 _____。



答：72

4. 兩條公路 k 及 m ，如果筆直延伸將交會於 C 處成 60° 夾角，如圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A 、 B 兩點間開拓成圓弧型公路，分別在 A 、 B 與此圓弧相切，則此圓弧長 = _____ 公尺。

(公尺以下四捨五入) ($\sqrt{3} \approx 1.732, \pi \approx 3.142$)



【90 年學測】

答 : 544

5. 在 xy 平面中，試問在不過圓 $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$ 內部的情況下， $(0,0)$ 到 $(12,16)$ 之最短路徑為 _____。

(A) $10\sqrt{3}$ (B) $10\sqrt{5}$ (C) $10\sqrt{3} + \frac{5\pi}{3}$ (D) $\frac{40\sqrt{3}}{3}$ (E) $10 + 5\pi$

答 : (C)