

林名
数学

MATHEMATICS

相似形

《相似形》

目 錄

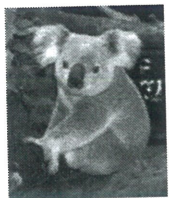
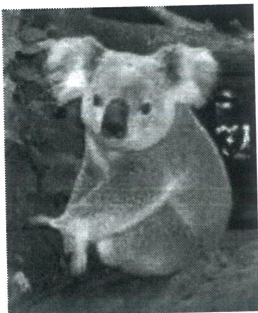
第 1 節 相似形的意義與比例線段..... 1

第 2 節 相似三角形與相似形的應用..... 33

第1節 相似形的意義與比例線段

重點1 相似形的意義

一、相似形的意義：兩個平面圖形，不論其大小是否相等，只要形狀相同，則稱為相似形。



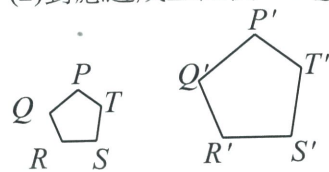
二、相似形的定義與記法：

1. 定義：兩個 n 邊形，若「對應角相等」且「對應邊成正比例」，則兩 n 邊形是相似形。
2. 記法：相似符號「 \sim 」。

例：五邊形 $PQRST$ 和五邊形 $P'Q'R'S'T'$ 相似，記為五邊形 $PQRST \sim$ 五邊形 $P'Q'R'S'T'$ ，

則：(1) 對應角相等： $\angle P = \angle P'$ ， $\angle Q = \angle Q'$ ， $\angle R = \angle R'$ ， $\angle S = \angle S'$ ， $\angle T = \angle T'$

(2) 對應邊成正比例： $\overline{PQ} : \overline{P'Q'} = \overline{QR} : \overline{Q'R'} = \overline{RS} : \overline{R'S'} = \overline{ST} : \overline{S'T'} = \overline{PT} : \overline{P'T'}$



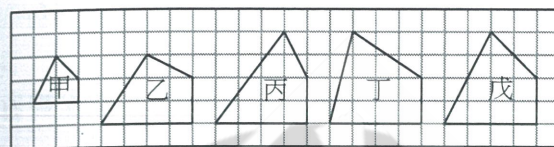
三、多邊形的相似：兩個 n 邊形，滿足「對應角相等」且「對應邊成正比例」。

1. 兩個 n 邊形 ($n > 3$)，若其對應邊成正比例，則兩多邊形不一定相似。
2. 兩個 n 邊形 ($n > 3$)，若其對應角相等，則兩多邊形不一定相似。
3. 若兩個多邊形全等，則兩個多邊形必相似；但若兩個多邊形相似，則兩多邊形未必全等。
4. 任兩個圓必為相似形，任兩個同邊數的正多邊形必相似。
5. 若兩多邊形同時相似於另一個多邊形，則這兩多邊形必相似。

四、三角形的相似：兩個三角形，若「對應角相等」或「對應邊成正比例」，則這兩三角形相似。

範例1

下面哪些圖形彼此是放大或縮小圖形？



範例2

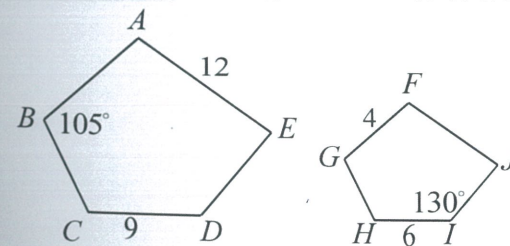
下列各種圖形中，請問那一組相似？若不相似，請說明原因？

- (1) 長方形與正方形
- (2) 兩個大小不同的正方形
- (3) 等腰梯形

範例3

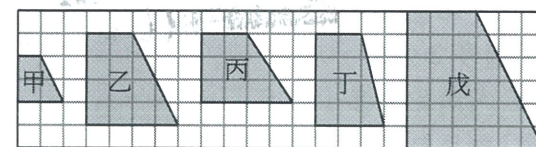
若五邊形 $ABCDE$ 是五邊形 $FGHIJ$ 的放大圖，則：

- (1) $\angle D$ 及 $\angle G$ 度數是多少？
- (2) \overline{AB} 和 \overline{JI} 長度是多少？
- (3) 五邊形 $FGHIJ$ 是五邊形 $ABCDE$ 的幾倍縮小圖？
- (4) 五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $FGHIJ$ 的周長比。



練習1

下面哪些圖形彼此是放大或縮小圖形？



練習2

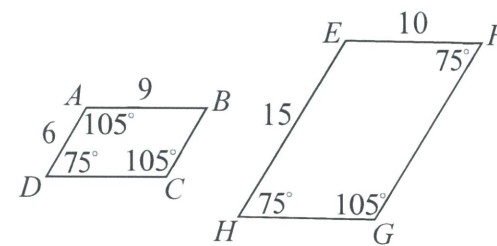
下列各種圖形中，請問那一組相似？若不相似，請說明原因？

- (1) 菱形與正方形
- (2) 兩個大小不同的正五邊形
- (3) 等腰直角三角形

練習3

如圖，已知平行四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形 $EFGH$ 的縮小圖，則：

- (1) $\angle B$ 度數是多少？
- (2) 四邊形 $ABCD$ 是四邊形 $EFGH$ 的幾倍縮小圖？
- (3) 四邊形 $EFGH$ 的周長是四邊形 $ABCD$ 周長的幾倍？



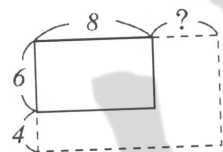
範例 4

將 $\triangle ABC$ 放大後得 $\triangle DEF$ ，已知 $\triangle DEF$ 的邊長為12公分、16公分、20公分，且 $\triangle ABC$ 最長邊比最短邊多2公分，求：

- (1) $\triangle ABC$ 內角和為多少度？
- (2) $\triangle ABC$ 周長為多少公分？
- (3) $\triangle ABC$ 是 $\triangle DEF$ 的幾倍縮小圖？

範例 5

如圖，一長方形的長為8公分、寬為6公分，如果將長增加多少公分、寬增加4公分之後，所得的新長方形會與原長方形相似？



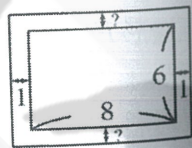
練習 4

將四邊形 $ABCD$ 影印縮小後的四邊形 $EFGH$ ，已知四邊形 $EFGH$ 的邊長分別為10、8、6、16，且四邊形 $ABCD$ 的最短邊長是18，求：

- (1) 四邊形 $ABCD$ 是四邊形 $EFGH$ 的幾倍放大圖？
- (2) 四邊形 $ABCD$ 的周長是多少？

練習 5

如圖，一長為8公尺、寬為6公尺的矩形，如果將長的兩邊分別增加1公尺，短邊的兩邊分別增加多少公尺，所得的長方形與原長方形相似？



範例 6

將六邊形 $ABCDEF$ 用影印機放大成120%，得一新的六邊形 $A'B'C'D'E'F'$ ，若 $\overline{CD}=6$ ， $\angle B=65^\circ$ ，求：

- (1) \overline{CD} 的對應邊 $\overline{C'D'}$ = ?
- (2) $\angle B$ 的對應角 $\angle B'$ = ?

範例 7

設四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，且 $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 3 : 4 : 5 : 6$ ，求 $\angle A'$ 的對應角 $\angle A$ 及 $\angle D$ 的對應角 $\angle D'$ 的度數？

練習 6

將五邊形 $ABCDE$ 用影印機縮小成80%，得一新的五邊形 $A'B'C'D'E'$ ，若 $\overline{AB}=10$ ， $\angle E'=65^\circ$ ，求：

- (1) $\overline{AB'}$ 的對應邊 \overline{AB} = ?
- (2) $\angle E'$ 的對應角 $\angle E$ = ?

練習 7

已知五邊形 $ABCDE$ 與五邊形 $A'B'C'D'E'$ 相似，且 $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 2 : 1 : 2 : 3$ ， $\angle E = 140^\circ$ ，則五邊形 $A'B'C'D'E'$ 之最大內角與最小內角相差幾度？

範例 8

若五邊形 $ABCDE \sim$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$ ，且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DE}:\overline{EA}=2:3:4:5:6$ ， $A'B'C'D'E'$ 的周長為 50 公分，試分別求： \overline{CD} 的對應邊 $\overline{C'D'}$ 與 \overline{AB} 的對應邊 $\overline{A'B'}$ ？

範例 9

設 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=5:12:13$ ，已知 $\triangle A'B'C'$ 的周長為 60 公分，求：
 (1) $\triangle A'B'C'$ 各邊的長。
 (2) $\triangle A'B'C'$ 的面積。

練習 8

若四邊形 $ABCD \sim$ 四邊形 $A'B'C'D'$ ，且 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD}:\overline{DA}=1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$ 。試求：
 (1) 試求 $\overline{A'B'}:\overline{B'C'}:\overline{C'D'}:\overline{D'A'}$ 的比。
 (2) 四邊形 $A'B'C'D'$ 周長為 150，求 $\overline{A'B'}$ 、 $\overline{B'C'}$ 。

練習 9

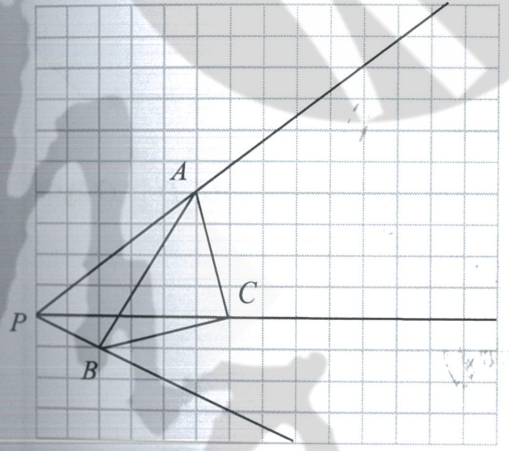
設 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{AC}=2x+10$ ， $\overline{BC}=8$ ， $\overline{DE}=4-x$ ， $\overline{EF}=-4x+4$ ， $\overline{DF}=9$ ，若 $\overline{AB} < \overline{DE}$ ，求：
 (1) $x=?$
 (2) $\triangle ABC$ 的周長。

重點 2 相似形的畫法

1. 利用方格紙(坐標)的畫法。
 2. 利用中心點比例線段畫法。
 (1) 中心點在頂點。
 (2) 中心點在邊上。
 (3) 中心點在圖形內部。
 (4) 中心點在圖形外部。

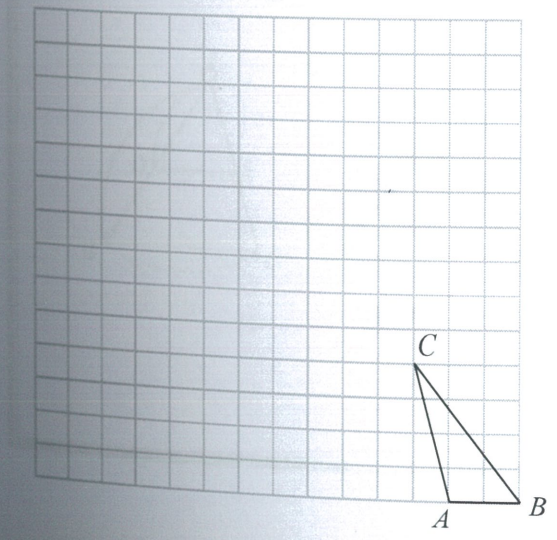
範例 10

以 P 為中心點，試分別在直線 PA 、 PB 、 PC 各取一點 D 、 E 、 F ，使 $\triangle DEF$ 周長是 $\triangle ABC$ 的 2 倍。



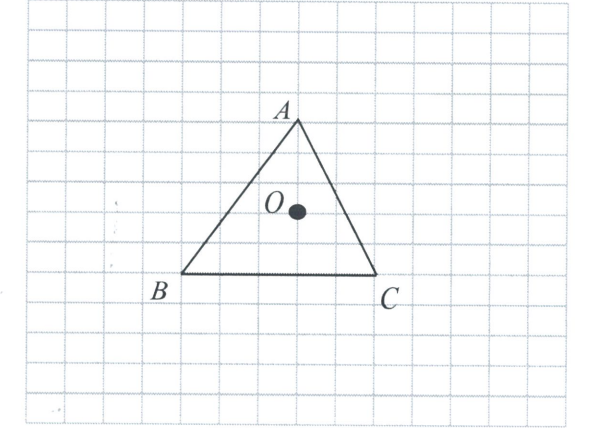
範例 11

以 B 為中心點，試分別在 \overline{BA} 、 \overline{BC} 各取一點 D 、 E ，使 $\triangle DBE$ 為 $\triangle ABC$ 的 3 倍放大圖。



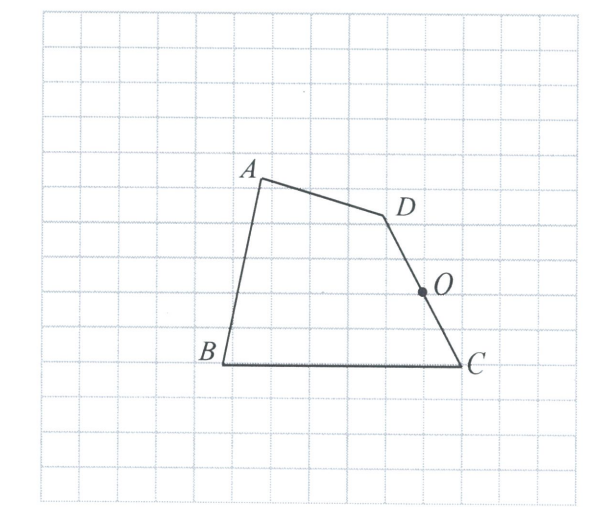
練習 10

已知 O 為 $\triangle ABC$ 內部一點，以 O 為中心點，試分別在 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 各取一點 D 、 E 、 F ，使 $\triangle DEF$ 面積為 $\triangle ABC$ 的 4 倍放大圖。



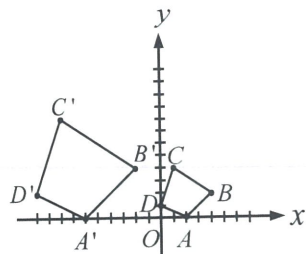
練習 11 【面積比=對應邊長平方比】

試分別在 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 各取一點 E 、 F 、 G 、 H ，使四邊形 $EFGH \sim$ 四邊形 $ABCD$ ，且四邊形 $EFGH$ 面積：四邊形 $ABCD$ 面積 = 9:4。



範例 12

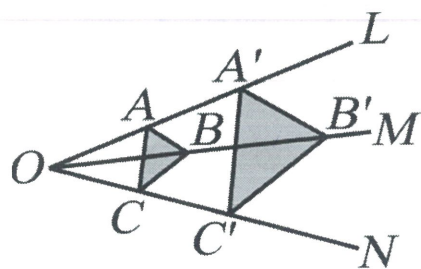
有一四邊形 $ABCD$ 的頂點坐標分別為 $A(2,0)$ 、 $B(4,2)$ 、 $C(1,4)$ 、 $D(0,1)$ 。如果畫另一四邊形 $A'B'C'D'$ 是四邊形 $ABCD$ 相似，且其頂點坐標分別為 $A'(-6,0)$ 、 $B'(-2,4)$ 、 $C'(s,t)$ ，則 $s+t=?$



範例 13

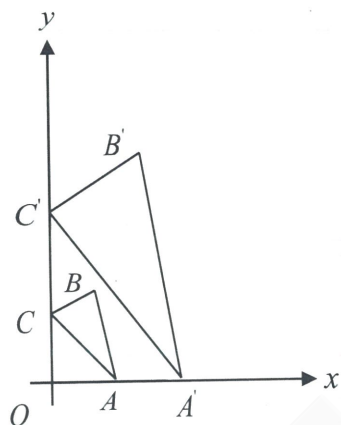
如圖， $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以 O 為中心點而放大的相似形，且 $\overline{OA}:\overline{AA'}=1:1$ 。試求：

- (1) $\overline{AC}:\overline{A'C'}$ 的比？
- (2) 若 $\overline{OA}=4$ ， $\overline{BC}=3$ ，求 $\overline{OA'}$ 、 $\overline{B'C'}$ 之長？



練習 12

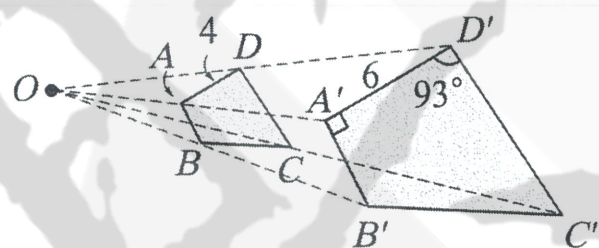
如圖， A 、 A' 在 x 軸上， C 、 C' 在 y 軸上，且 $A(3,0)$ 、 $B(2,3)$ 、 $C(0,2)$ ， $2\overline{OA'}=5\overline{OA}$ ， $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以 O 為中心點而放大的相似形，求 B' 點的坐標為何？



練習 13

如圖，四邊形 $ABCD$ 是四邊形 $A'B'C'D'$ 以 O 為中心點而縮小的相似形。試求：

- (1) $\overline{CD}:\overline{C'D'}$ 的比？
- (2) 若 $\overline{B'C'}=9$ ，求 $\overline{BC}=?$
- (3) 若 $\angle C=60^\circ$ ，求 $\angle B=?$



重點 3 平行線截比例線段

一、比例線段：

\overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{DE} 、 \overline{EF} 四個線段，有 $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EF}$ 的關係，就稱 \overline{AB} 、 \overline{BC} 與 \overline{DE} 、 \overline{EF} 成比例線段。

二、平行線截三角形的兩邊成比例線段性質：

1. 平行於三角形一邊且與另兩邊相交的直線，三角形的另兩邊截成比例線段。

例：如圖(一)， $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$ 。

2. 過三角形的一邊中點且平行另一邊的直線，必通過第三邊的中點。

例：如圖(二)， $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{AB} 的中點，若 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 E 為 \overline{AC} 的中點。

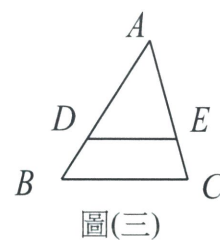
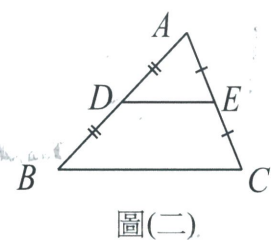
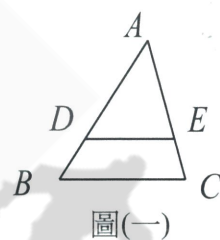
3. 三角形的兩邊中點的連線會平行於第三邊，且此線段為第三邊的一半。

例：如圖(二)， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 的中點，則：

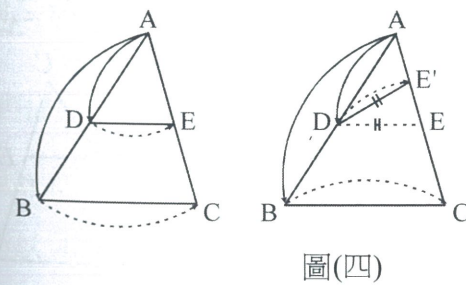
$$(1) \overline{DE} \parallel \overline{BC} \quad (2) \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$

4. 一直線截三角形兩邊成比例線段，則此直線必平行於三角形的第三邊。

例：如圖(三)， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上，若 $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$ ，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 。



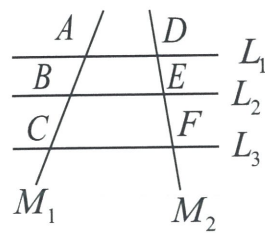
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\Rightarrow \begin{cases} \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC} \\ \overline{AD}:\overline{AB}=\overline{AE}:\overline{AC} \\ \overline{DB}:\overline{AB}=\overline{EC}:\overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$
 $\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}$ 不一定成立 $\rightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ (如圖四)



三、平行線截比例線段性質：

1. 兩直線被一組三平行線所截出來的截線段成比例線段。

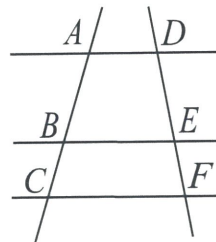
例：\$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3\$，而且分別與 \$M_1\$ 相交於 \$A\$、\$B\$、\$C\$ 三點，與 \$M_2\$ 相交於 \$D\$、\$E\$、\$F\$ 三點，則 \$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF}\$。



2. 推論得知：(平行 \$\Rightarrow\$ 左右成比例)

若 \$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}\$，則：

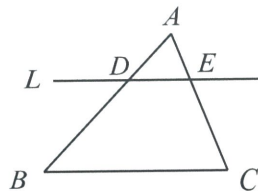
$$\begin{cases} \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{EF} \\ \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{DF} \\ \overline{BC} : \overline{AC} = \overline{EF} : \overline{DF} \end{cases}$$



◆兩直線被 \$n\$ 條平行線所截出來的截線段會對應成比例。

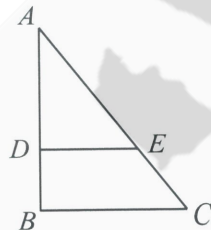
範例 14

如圖，\$L \parallel \overline{BC}\$，\$\overline{AE} = 1.6\$，\$\overline{EC} = 4\$，\$\overline{DB} = 5\$，求 \$\overline{AD}\$ 之長。



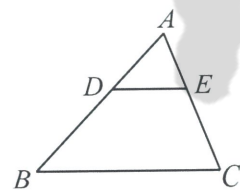
練習 14

如圖，\$\triangle ABC\$，\$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$，若 \$\overline{BD} = x + 3\$，\$\overline{AD} = 12\$，\$\overline{AE} = \overline{BC} = 3x\$，\$\overline{CE} = 10\$，求 \$x\$ 及 \$\triangle ABC\$ 的面積。



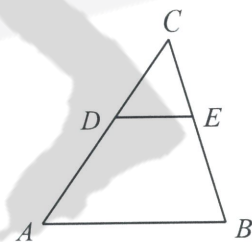
範例 15

如圖，\$\triangle ABC\$，\$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$，若 \$\overline{AD} = 4\$，\$\overline{BD} = 6\$，\$\overline{DE} = 6\$，求 \$\overline{BC}\$ 之長。



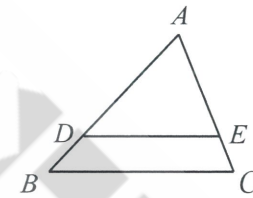
練習 15

如圖，\$\triangle ABC\$ 中，\$\overline{DE} \parallel \overline{AB}\$，\$\overline{CD} = x - 2\$，\$\overline{DA} = 13 - x\$，\$\overline{DE} = 4\$，\$\overline{AB} = x + 5\$，求 \$x\$ 之值。



範例 16

已知 \$\triangle ABC\$，\$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$，若 \$\overline{AD} = 2x - 1\$，\$\overline{AB} = 12\$，\$\overline{AE} = 3x - 9\$，\$\overline{AC} = 8\$，求 \$x\$ 之值。



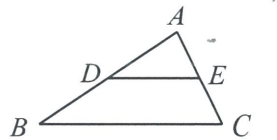
範例 17

\$\triangle ABC\$ 中，\$D\$、\$E\$ 分別為 \$\overline{AB}\$、\$\overline{AC}\$ 上的點，若 \$\overline{AD} = 6\$，\$\overline{AB} = 8\$，\$\overline{AE} = 5\$，\$\overline{EC} = 1.25\$，試說明 \$\overline{DE}\$ 與 \$\overline{BC}\$ 是否平行？

【說明】

練習 16

如圖，\$\triangle ABC\$ 中，\$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$，\$\overline{AD} = x - 3\$，\$\overline{BD} = 3x - 19\$，\$\overline{DE} = 3\$，\$\overline{BC} = 7\$，求 \$x\$ 之值。



練習 17

\$\triangle ABC\$ 中，\$D\$、\$E\$ 分別為 \$\overline{AB}\$、\$\overline{AC}\$ 上的點，若 \$\overline{AD} = 6\$，\$\overline{BD} = 4\$，\$\overline{AE} = 9\$，\$\overline{AC} = 15\$，試說明 \$\overline{DE}\$ 與 \$\overline{BC}\$ 是否平行？

【說明】

範例 18

如圖，\$\triangle ABC\$ 中，\$D\$、\$E\$ 分別為 \$\overline{AB}\$、\$\overline{AC}\$ 的中點，請在下列空格內填入適當的答案，完成證明：

- (1) \$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$
- (2) \$\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}\$

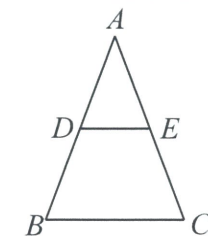
【證明】

(1) 因為 \$D\$、\$E\$ 分別為 \$\overline{AB}\$、\$\overline{AC}\$ 的中點，

所以 \$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AE} : \overline{EC} = \underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}}\$，
故 \$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$。

(2) 因為 \$\overline{DE} \parallel \overline{BC}\$，

所以 \$\overline{DE} : \overline{BC} = \underline{\hspace{1cm}} : \overline{AB} = 1 : \underline{\hspace{1cm}}\$，
故得知 \$\underline{\hspace{1cm}}\$。



練習 18

如圖 \$\triangle ABC\$ 中，\$D\$、\$E\$ 分別為 \$\overline{AB}\$、\$\overline{AC}\$ 的中點，\$\angle ADE = 40^\circ\$、\$\overline{DE} = 6\$，求：

- (1) \$\angle B\$ 的度數。
- (2) \$\overline{BC}\$ 的長。

