林晶數學

極限與函數

1-1 數列的極限

數列極限的標準性質
數列極限的特殊型式
數學歸納法

1-2 無窮等比數列與無窮等比級數

無窮等比級數
進階應用

1-3 函數的概念

函數的概念
進階變化

1-4 函數的極限(數學甲)

函數的極限
極限的性質

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

微積分可說是物理、化學、天文、工程……等科學之進階應用的基本工具。然而微積分的基本理論則源自於“極限”的概念了，請！

無窮的意義

維基百科:「無窮或無限，其數學符號為∞。來自於拉丁文的「infinitas」，即「沒有邊界」的意思。在數學方面的一些主題或概念中，無窮被認為是一個超越邊界而增加的概念，而不是一個數」

或許我們可藉由下列二組運算來探知∞的意義

①關於∞的四則運算：a , b都接近∞

$a+b$：

$a-b$：

$a\times b$：

$a\div b$：

②關於 0 的特殊運算：a接近∞，A , B 接近 0

$\frac{A}{1}$：

$\frac{1}{A}$：

$\frac{B}{A}$：

$\frac{1}{a}$：

無窮數列的極限

給予一個數列$\langle a_n\rangle$，如果存在一個定值α

使得：

當 n 非常大 (n趨近於無窮大時)

$|a_n-\alpha|$可以小於任意正數 ($|a_n-\alpha|$趨近於0)

則稱：

數列$\langle a_n\rangle$收斂於α，或稱 a_n 的極限為α

記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

立航心得語

直觀的來說

當項數n趨近於∞時

a_n 的值趨近於定值α

就稱爲收斂數列

記作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$

否則稱爲發散數列

且稱$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$不存在

✶✶✶✶✶必讀!必讀!重要!重要!必讀!必讀!重要!重要!重要!必讀!必讀!重要!重要!✶✶✶✶✶

立航心得語

請注意，
等比數列/級數
限制 $r \neq 0$

無窮等比數列的極限

數列 $<a_n>: a$，ar，ar^2，ar^3，……，ar^{n-1}，……

可由數線上的表現直接觀察：

(1) $-1<r<1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (收斂數列)

(2) $r=1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (收斂數列)

(3) $r \leq -1$ 或 $r>1$ ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在(發散數列)

<結論> 無窮等比數列 $<r^n>$ 收斂的充要條件爲

$\boxed{\quad\quad\quad\quad}$

其中：$-1<r<1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \boxed{\quad}$

$r=1$ 時 ⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \boxed{\quad}$

數列極限的四則運算性質

設 $<a_n>$ 與 $<b_n>$ 皆爲收斂數列，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，$c$ 是常數，則

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \alpha+\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \alpha-\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\alpha = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n) = \alpha\cdot\beta = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ $(b_n \neq 0$，$\beta \neq 0)$

<注意>

(1)設 $\langle a_n\rangle$ 是一個收斂數列，$\langle b_n\rangle$ 是一個發散數列，則其四則運算

a_n+b_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+n^{1000}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n^{1001}+1}{n}) = \infty$ (發散)

a_n-b_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-n^{1000}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{-n^{1001}+1}{n}) = -\infty$ (發散)

a_nb_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1) = 1$ (收斂)

$\dfrac{a_n}{b_n}$ ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{\frac{1}{n}}{(-1)^n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(-1)^n}{n}) =$ 不定值(發散)

(2)設 $\langle a_n\rangle$ 是一個發散數列，$\langle b_n\rangle$ 是一個發散數列，則其四則運算

a_n+b_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n^{1000}+(-n^{1000})) = \lim\limits_{n\to\infty}(0) = 0$ (收斂)

a_n-b_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(n^{1000}-n^{1000}) = \lim\limits_{n\to\infty}(0) = 0$ (收斂)

a_nb_n ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\cdot(-1)^{n+1}) = -1$ (收斂)

$\dfrac{a_n}{b_n}$ ⇨ $\boxed{\quad}$ 例子：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}) = -1$ (收斂)

1. 判斷下列各無窮數列為收斂或發散數列，若為收斂數列，求其極限。

(1) $\langle (0.99)^n \rangle$　(2) $\langle (\sqrt{2}-1)^n \rangle$　(3) $\langle (\frac{8}{7})^n \rangle$

(4) $\langle \frac{(-1)^n}{n} \rangle$　(5) $\langle 1+\frac{1}{n} \rangle$

【答案】▶(1) 0　(2) 0　(3)發散數列　(4) 0　(5) 1

【解析】▶

2. 試求下列二式之極限 $(m \cdot n > 0)$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{m}{m+1})^n =$ ________　(2) $\lim\limits_{m\to\infty}(\frac{m}{m+1})^n =$ ________

【答案】▶(1) 0　(2) 1

【解析】▶

3. 試求下列二式的極限

① $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$　② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n+6^n}{8^n}$

【答案】▶① 0　② 0

【解析】▶

試求下列二式的極限

① $\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n^2})$　② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}$　③ $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}-\frac{n}{n-1})$

⇨① 6　② 0　③ 0

性質證明

4. 設 $<a_n>$，$<b_n>$ 均為收斂數列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$

試證明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\alpha\cdot\beta$

【證明】▶ 已知當 $n\to\infty$ 時，則 $|a_n-\alpha|\to 0$ 且 $|b_n-\beta|\to 0$

(1) $|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|=|(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)|\le|a_n-\alpha|+|b_n-\beta|$

故知當 $n\to\infty$ 時，

$|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|\to 0$

表示 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$

(2) $|(a_nb_n)-(\alpha\beta)|=|(a_nb_n)-\alpha b_n+\alpha b_n-(\alpha\beta)|$

$=|b_n(a_n-\alpha)+\alpha(b_n-\beta)|$

$\le|b_n||a_n-\alpha|+\alpha|b_n-\beta|$

故知當 $n\to\infty$ 時，

$|(a_nb_n)-(\alpha\beta)|\to 0$

表示 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\alpha\cdot\beta$

5. 設 $<a_n>$ 為一個數列，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}=\dfrac{1}{2}$，則

(1)證明 $<a_n>$ 是一個收斂數列

(2)試求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ ________

立航心得語

是否可以直接使用

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}$

$=\dfrac{4\lim\limits_{n\to\infty} a_n-2}{3\lim\limits_{n\to\infty} a_n+1}$

⇨ $\boxed{}$

【答案】▶ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

【解析】▶ 令 $b_n=\dfrac{4a_n-2}{3a_n+1}$，左右同乘 $(3a_n+1)$

$3b_na_n+b_n=4a_n-2$

$2+b_n=(4-3b_n)a_n$

$a_n=\dfrac{2+b_n}{4-3b_n}$

由已知 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\dfrac{1}{2}\to\langle b_n\rangle$ 收斂

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2+b_n}{4-3b_n}=\frac{2+\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{4-3\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\frac{2+\frac{1}{2}}{4-3\times\frac{1}{2}}=1$$

故 $\langle a_n\rangle$ 收斂

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

我們已經學會數列極限的定義，同時也清楚其實可以採取

直觀的代入 $\boxed{n\to\infty}$ 觀察結果為何

其中有二種型式 $\frac{\infty}{\infty}$ 及 $\infty-\infty$ 需要再處理才能確認其極限，請！

$\frac{\infty}{\infty}$ 型的極限

對於無窮數列的極限，可採取直觀的代入 $\boxed{n\to\infty}$，

若是碰到 $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 型的式子，則應

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

然後再代入 $\boxed{n\to\infty}$ 求極限

> 6. 試求下列二式的極限
>
> ① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$　　② $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^n+8^n-9^n}{2^{3n+1}+3^{2n+1}}$

【答案】▶① 1　　② $-\frac{1}{3}$

【解析】▶

立航心得小語

直接代入，若是碰到 $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ 型的式子

⇨ $\boxed{\qquad\qquad}$

牛刀小試

1. 設 n 為正整數，方程式 $x^2-2x-n=0$ 的兩根為 a_n 與 b_n，且 $a_n>b_n$。
試問下列哪些選項是正確的？
(1) $a_n>0$ 對所有 n 皆成立　(2) $a_n+b_n=2$ 對所有 n 皆成立
(3) $b_{n+1}>b_n$ 對所有 n 皆成立　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_na_{n+1}}{n}=1$　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}=2$
⇨(1)(2)(4)(5)　　【97 年數學甲】

2. 設 $a=0.9$，$b=1.1$，$c=1.01$，以及 $x_n=\dfrac{\alpha a^n}{1+a^n}+\dfrac{\beta b^n}{1+b^n}+\dfrac{\gamma c^n}{1+c^n}$，
$n=1,2,3,\cdots$，式中 α、β、γ 為任意實數，則極限值 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$
(A) 0　(B) $\alpha+\beta+\gamma$　(C) $\alpha+\beta$　(D) $\beta+\gamma$　(E) $\alpha+\gamma$
⇨(D)