微分公式

1. 多項式(次方型)：$\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

   註：分式型：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{x^2}$

2. 根式型：$\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3. 連鎖率(chain rule)：

   (1) $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

   (2) $\dfrac{d}{dx}f(g(h(x)) = f'(g(h(x))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$

   (3) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

4. 指數函數型：

   (1) $\dfrac{d}{dx}a^x =$

   (2) $\dfrac{d}{dx}e^x =$

5. 對數函數型：

   (1) $\dfrac{d}{dx}\log_a x =$

   (2) $\dfrac{d}{dx}\ln x =$

6. 三角函數型：

   (1) $\dfrac{d}{dx}\sin x =$

   (2) $\dfrac{d}{dx}\cos x =$

   (3) $\dfrac{d}{dx}\tan x =$

   (4) $\dfrac{d}{dx}\cot x =$

   (5) $\dfrac{d}{dx}\sec x =$

   (6) $\dfrac{d}{dx}\csc x =$

7. 反三角函數型：

(1) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=$

(2) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=$

(3) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=$

(4) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=$

(5) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=$

(6) $\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=$

8. 雙曲線函數型：

定義：$\sin hx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\cos hx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，$\tan hx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(1) $\frac{d}{dx}\sin hx=$

(2) $\frac{d}{dx}\cos hx=$

(3) $\frac{d}{dx}\tan hx=$

(4) $\frac{d}{dx}\cot hx=$

(5) $\frac{d}{dx}\sec hx=$

(6) $\frac{d}{dx}\csc hx=$

9. 反雙曲線函數型：

定義：$\sin h^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$\cos h^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\tan h^{-1}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

(1) $\frac{d}{dx}\sin h^{-1}x=$

(2) $\frac{d}{dx}\cos h^{-1}x=$

(3) $\frac{d}{dx}\tan h^{-1}x=$

第一章　極限與連續

主題一　函數的極限

1. 確定型極限(Determined)

   說明：已知$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$中，若$g(a)\neq 0$稱之確定型極限。

   解法：直接代入法。

2. 不定型極限($\dfrac{0}{0}$型)(Underdetermined)

   說明：已知$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$中，若$g(a)=f(a)=0$稱之不定型極限。

   A. 有理分式型：通分、合併、消公因式、代值。
   B. 無理根式型：分子或分母有理化、消公因式、代值。

【註】常用有理化公式：

①$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \longrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y$

②$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \longrightarrow (\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x+y$

③$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \longrightarrow (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})=x-y$

3. 無窮極限(Infinite limit)

   說明：已知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$中，若$f(\infty)=g(\infty)=\infty$稱之無窮極限。

   A. $\dfrac{\infty}{\infty}$型：同除法。

   B. $\infty-\infty$型：
   - (1)有理分式型：通分轉成$\dfrac{\infty}{\infty}$型
   - (2)無理根式型：利用有理化轉成$\dfrac{\infty}{\infty}$型。

【註】Σ公式

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n}k=1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)=1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

精選範例

範例1

求極限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+1}{x^2-3x+3}$

解：所求 $=\dfrac{(1)^3-(1)^2+1}{(1)^2-3(1)+3}=1$

類題1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x^3+2)}{e^{x^2}\cdot\cos x}$。 **答**：：$\ln2$

類題2 $\lim\limits_{x\to365}(x^4-367x^3+729x^2+364x+215)$。 **答**：$-150$

範例2

求極限 $\lim\limits_{x\to1}\{\ln|x^2-3x+2|-\ln|x^2-4x+3|\}=$

解：$\lim\limits_{x\to1}\ln\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right|=\ln\lim\limits_{x\to1}\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x-3)}\right|=\ln\left|\dfrac{1}{2}\right|=-\ln2$

範例3

求極限 $\lim\limits_{x\to2}(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4})$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{(x-2)(x+2)}\right]=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{x(x+2)-4x}{(x-2)(x+2)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{2}{2+2}=\dfrac{1}{2}$

範例4

求 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{x^3-1}{x^2-1}-\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x-1})=$

解：$\lim\limits_{x\to1}[\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)}]=\dfrac{3}{2}-2=-\dfrac{1}{2}$

類題1 $\lim_{x\to -3}\frac{1}{x+3}\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+2}\right)=$ 答：-2

類題2 求 $\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+3(2+h)-10}{h}$ 答：7

類題3 $\lim_{x\to 1}(\log_9|x^2-3x+2|-\log_9|x^2+x-2|)=$ 答：$-\frac{1}{2}$

範例5

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}}=$$

解：$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x+3}+\sqrt{6})}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\sqrt{2}$

範例6

Find $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-3}{x-1}=$

解：$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt[3]{x}-1+\sqrt[4]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$$

範例7

Find $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=$

解：$\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{3}}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+7)-8}{(x-1)[(x+7)^{\frac{2}{3}}+(x+7)^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}+(8)^{\frac{2}{3}}]}$

$$=\frac{1}{8^{\frac{2}{3}}+8^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}+8^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{12}$$