目錄

目錄

第一章　矩陣、聯立方程式及行列式

定義： 矩陣 (matrix)

若 A 為 $m\times n$ 矩陣，則 A 可表成

$$A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 a_{ij} 稱為此矩陣之第 ij 位元 (ij-entry)。當 $m=n$ 時，稱矩陣 A 為方陣 (square matrix)。當 $a_{ij}=0,\forall i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$ 時，稱矩陣 A 為零矩陣(zero matrix)。

定義：

(1) 若 $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$，吾人稱 A 為行向量(column vector)。

(2) 若 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1\times n}$，吾人稱 A 為列向量(row vector)。

第二章　向量空間(Vector Space)

Def：(直積)(direct product)

A，B 為兩非空集合，$A\times B\equiv\{(a,b)|a\in A,b\in B\}$

說例：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x,y\}$，則 $A\times B=\{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y),(3,x),(3,y)\}$

符號：$R\times R:=R^2$;　$R\times R\times R:=R^3$

定理：A，B 為兩非空集合，且 $n(A)=p$，$n(B)=q$，則

$$n(A\times B)=p\cdot q$$

其中 $n(A)$ 表集合 A 之元素個數。

定義：

給定一個非空集合 S 和一個函數 $*:S\times S\to S$，則稱 “$*$”，為在 S 上之二元運

第三章　矩陣的對角線化

定義：<方陣 A 之特徵值及特徵向量>

$A \in C^{n\times n}$，$\exists\, \lambda \in C$ 及非零向量 $x \in C^{n\times 1}$，使得 $Ax = \lambda x$（或 $(\lambda I - A)x = 0$），此時之 λ 稱為矩陣 A 之特徵值（eigenvalue；characteristic value），而 x 稱為矩陣 A 之特徵向量（eigenvector；characteristic vector）。

附註：<求方陣 A 特徵值、特徵向量之步驟>

步驟一：<解 λ>

$|\lambda I - A| = 0$　　<特徵方程式>（characteristic equation）

步驟二：<解 x>

$(\lambda I - A)x = 0$

喬丹形式

學習重點一： 給定一個無法做到對角化分解的方陣 A，如何將此方陣做成喬丹分解；亦即 $P^{-1}AP=J$，其中方陣 P 稱為方陣 A 之模態矩陣(modal matrix)。

學習重點二： 給定一個無法做到對角化分解的方陣 A，如何求其最小多項式；亦即求 $m(\lambda)$。

學習重點三： 給定一個無法做到對角化分解的方陣 A，試求 $f(A)$。

定義一： $A\in C^{n\times n}$ 且 $\lambda\in\sigma(A)$。吾人稱非零向量 x 為對應於 λ 的 k 階廣義特徵向量(generalized eigenvector of grade k)，若且為若

$$x\in N\left[(A-\lambda I)^{k}\right]-N\left[(A-\lambda I)^{k-1}\right]。$$

定義二： 若 x 為對應於 λ 的 k 階廣義特徵向量，吾人定義 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 為長度為 k 的廣義特徵向量鏈 (chain of generalized eigenvectors of length k)，其中

第七章　內積空間、雙線型式及二次型式

定義：<內積空間><Inner product space>

$(V, K, +, \cdot)$為一向量空間，K僅可為R或C，此空間配合一運算子$\langle , \rangle$滿足下述四條件，吾人稱$(V, K, +, \cdot)$為一內積空間（Inner product space）。

$$\langle , \rangle : V \times V \to K$$

(a) $\langle au_1 + bu_2 , v\rangle = a\langle u_1 , v\rangle + b\langle u_2 , v\rangle$

(b) $\langle u , v\rangle = \overline{\langle v , u\rangle}$

(c) $\langle u , u\rangle \geq 0$

(d) $\langle u , u\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$

其中$u_1 , u_2 , u , v \in V$　，　$a , b \in K$

範例：試證

1. $\langle u , av_1 + bv_2\rangle = \overline{a}\langle u , v_1\rangle + \overline{b}\langle u , v_2\rangle$

2. $\langle 0 , u\rangle = 0$

3. $\langle u , 0\rangle = 0$

第九章　動態系統分析

給定$n \times n$之方陣A

目標：求解下列動態方程式〔微分方程式〕之解

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) \text{，}$$

其中

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in R^{n\times 1}$$

定理：

動態方程式〔微分方程式〕$\dot{x}(t) = Ax(t)$之解為

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

證明：

將$x(t) = e^{At}x(0)$代入左式可得$Ae^{At}x(0)$

將$x(t) = e^{At}x(0)$代入右式可得$Ae^{At}x(0)$