講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

實數的系統是數學的基礎結構，許多數學分支都在此植根，開花、結果。我們將實數系統整理成下面的圖表：

- 實數R ⇨
  - 有理數Q ⇨
    - 整數Z ⇨
      - 負整數
      - 零
      - 正整數N
    - 小 數 ⇨
      - 有限小數
      - 循環小數
  - 無理數（不循環的無限小數）

有理數（rational number）

在數學上，凡能表成 $\frac{a}{b}(a,b\in Z\ ，b\neq 0)$ 形式的數，我們稱它為"有理數"

(1)加法：$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$

(2)減法：$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$

(3)乘法：$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$

(4)除法：$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$

由上述運算可知：加減乘除對於有理數系都有封閉性。
也就是說四則運算在有理數系中已經沒有缺陷。

立航心得語

有理(rational)是外文的誤譯，本來，rational = ratio，意思是 成比例的數

無理數（irrational number）

在數線上，還有許多不能表成分數的數，我們稱為"無理數"。它們表成小數時，都是 不循環的無限小數

立航心得語

有理數與無理數合在一起，畫出數線上所有的點，它們一起就構成了實數

試試看

是非題：

1.(　)凡型如 $\frac{q}{p}$ 的數皆稱為有理數。

2.(　)任意二個有理數做加、減、乘、除的結果仍為有理數。

3.(　)任意二個無理數做加、減、乘、除的結果仍為無理數。

⇨1.× 2.× 3.×

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

在數線上，整數是離散分布的，也就是說

在數線上任兩相異整數之距離最小為 1

我們稱這個性質為整數的離散性。意即

設 $a,b\in Z$，若 $a\neq b$，則 $\square$

1. 設 a,b,c 均為整數，且 $3|a-1|+2|b-2|+|c-3|=2$，則滿足上述的序組 (a,b,c) 共有________組。

【答案】▶ 4 組

【解析】▶ (1) 由整數離散性知 $|a-1|=\square$　$\therefore a=1$

(2) 當 $|b-2|=\square$ 時⇨ $|c-3|=\square$

$\therefore b=2$ 且 $c=1$ 或 5 有二組解

(3) 當 $|b-2|=\square$ 時⇨ $|c-3|=\square$

$\therefore b=1$ 或 3 且 $c=3$ 有二組解

2. 設 x,y,z 均為整數，則方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$ 有________組解。

【答案】▶ 24 組

【解析】▶ 方程式應呈現 $\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{4}=6$ 的關係

而將 $(1,1,4)$ 分配給 $(x-1)^2$，$(y-2)^2$，$(z-3)^2$ 共有 $\boxed{3}$ 種情形

而每一種情形的所得的 (x,y,z) 的解各有 $\boxed{8}$ 種解

$\therefore$ 共有 $3\times 8=24$ 組解

練習試試

1. 滿足 $|a-1|+2(b-2)^2=3$ 之整數解 (a,b) 共有幾組？
⇨6

2. 滿足 $(a-1)^2+2\sqrt{(b-2)^2}=3$ 之整數解 (a,b) 共有幾組？
⇨4

3. 滿足 $|a-1|+2|b-2|+3|c-3|=3$ 之整數解 (a,b,c) 共有幾組？
⇨8

講道理 道理說清楚，就是好的開始

在數線上，有理數是密集分佈的。也就是說

任意兩個相異有理數之間至少有一個有理數

我們稱這個性質爲有理數的稠密性(denseness)，意即

設 $a,b\in Q$，若 $a<b$，則存在 $c\in Q$

使得 $\boxed{\phantom{a<c<b}}$

公式證明

3. 設 a,b 皆為有理數，$a<b$，試證存在一個有理數 c，使 $a<c<b$。

【證明】▶ 令 $c=\boxed{\phantom{\frac{a+b}{2}}}$

① $c-a=\dfrac{a+b}{2}-a=\dfrac{b-a}{2}>0$ $\therefore c>a$

② $b-c=b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}>0$ $\therefore b>c$

由①②知存在一有理數 c 滿足 $a<c<b$ 得證

立航心得語

我們常使用 **相減法**

判斷二個數的大小

若 $x-y>0$

則 $\boxed{}$

公式變化

4. 設 a，b 皆為有理數，$a<b$，試證存在一個無理數 c，使 $a<c<b$。

【證明】▶ 令 $c=\dfrac{a+\sqrt{2}b}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{a+\sqrt{2}b}{\sqrt{2}+1}\times\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

$\therefore c=(a-b)\sqrt{2}+(2b-a)$ 故 c 必爲無理數

① $c-a=(b-a)(2-\sqrt{2})>0$ $\therefore c>a$

② $c-b=(b-a)(1-\sqrt{2})<0$ $\therefore c<b$

故存在一個無理數 c，使 $a<c<b$

範題試試

是非題

1.( ) $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 之間有無限多個有理數。 【高師大附中】

2.( )若 a,b 爲實數且滿足 $a<b$，則 $a<\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3}b}{\sqrt{6}}<b$。

⇨1.○ 2.× 【建國中學】

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

在稠密性的證明中，若能加上數線上的分點公式就可瞭解這些數字所代表的幾何意義，進而推廣出其它稠密性的應用。

立航心得語

內分點公式的記法

⇨ ______

內分點公式

在數線上有二已知點 $A(a)$，$B(b)$，若點 $P(x)$ 在 A、B 之間，且知 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

立航心得語

外分點公式的要訣

⇨ $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=$ ______

外分點公式

在數線上有二已知點 $A(a)$，$B(b)$，若點 $P(x)$ 在 A、B 之外，且知 $A-B-P$ 並滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{-na+mb}{m-n}$$

中點公式

若 $P(x)$ 為 $\overline{AB}$ 之中點，意即 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:1$，則

$$x=\frac{a+b}{2}$$

公式證明

5. 在數線上有二已知點 $A(a)$，$B(b)$，若點 $P(x)$ 在 A、B 之間，且知 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

【證明】▶ 繪出數線 ⇨ $A(a)$ $\underbrace{\quad}_{m}$ $P(x)$ $\underbrace{\quad}_{n}$ $B(b)$

已知 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$

亦即 $\boxed{\quad\quad}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore nx-na=mb-mx$　故得 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$

進階試試

試證明外分點公式：

在數線上有二已知點 $A(a)$，$B(b)$，若點 $P(x)$ 在 A、B 之外，且知 $A-B-P$ 並滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

6. A(−3)，B(x)，C(y)，D(8) 是數線上由左而右的四個點，已知 $\overline{AB}=2\overline{BC}=3\overline{CD}$，則 x = ______，y = ______。【台南一中】

【答案】▶ x = 3，y = 6

【解析】▶ 已知 $\overline{AB}=2\overline{BC}=3\overline{CD}$ 可得 $\dfrac{\overline{AB}}{6}=\dfrac{\overline{BC}}{3}=\dfrac{\overline{CD}}{2}$

繪出數線 ⇨ ⟷，請！

立航心得語

若所求的點確定在二已知點之內

⇨就只使用 內分點公式 得到一組解

7. 設 A、B、C 這三個點在數線上的坐標分別是 −5、7 及 x，且滿足 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:5$，則 x = ______。【建國中學】

【答案】▶ $-\dfrac{1}{2}$ 或 −23

【解析】▶

立航心得語

若所求的點無法確定與已知點的關係

⇨就應分別使用 內分點 與 外分點 而得到二組解

進階試試

設數線上三點 A(−5)，B(9)，P(x)，已知 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$，則 x = ______。【鳳山高中】

⇨1 或 −47

8. 設 a,b 為實數，a < b，數線上

$$A\left(\frac{2a+5b}{7}\right)，B\left(\frac{5a+b}{6}\right)，C\left(\frac{5a+9b}{14}\right)，D\left(\frac{6a+b}{7}\right)$$

試依左而右的順序寫出 A,B,C,D 在數線上的位置。【高雄女中】

【答案】▶ D − B − C − A

【解析】▶ 繪出數線 ⇨ ⟷

立航心得語

$\dfrac{na+mb}{m+n}$ 比大小的要訣

⇨

進階試試

下列哪一個數值最大？

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{7}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{7}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

⇨(A)【中山女中】

林匠數學 | 有理數 | 有限小數

講道理 道理說清楚，就是好的開始

有理數的計算，就是要注意其可以表成分數的性質，然而當我們把分子除以分母化成小數時，是否爲有限小數或循環小數呢？請注意以下的一個簡單的技巧。

有限小數的條件

設a，b∈N，b＜a且a，b互質則

$\frac{b}{a}$爲有限小數的充要條件就是

a 必爲 ＿＿＿＿ 的型式

公式證明

9\. 設a，b∈N且b＜a及a，b互質，求$\frac{b}{a}$為有限小數之條件。

【證明】▶ 已知 $\frac{b}{a}$ 爲有限小數

表示存在一個自然數 n，使得 ＿＿＿＿

意即 $a \mid b\times10^n$　但知 a,b 互質　$\therefore a \mid 10^n$

故知 a 必爲 $2^{\alpha}\cdot5^{\beta}$ 的型式

試試看

下列何者可化成有限小數？

(A)$\frac{7}{17}$　(B)$\frac{11}{64}$　(C)$\frac{19}{300}$　(D)$\frac{301}{70}$　(E)$\frac{99}{60}$

⇨(B)(D)(E)

10\. 設 21x6947 為一個七位數，且$\frac{21x6947}{132}$可以化為有限小數，則 x = ＿＿＿＿。　【台南一中】

【答案】▶ 4

【解析】▶

11. 設$\frac{21}{a}$為最簡分數，且$\frac{21}{a}$可化為有限小數，若$\frac{1}{2}<\frac{21}{a}<1$，則 a 值。

【答案】▶ 25，32或40

【解析】▶ 已知$\frac{21}{a}$可化爲有限小數，則a必爲 $\boxed{\quad\quad\quad}$ 的型式。

又知$\frac{1}{2}<\frac{21}{a}<1$　∴ $1<\frac{a}{21}<2$　表示　$21<a<42$

那麼，a值可爲 $\boxed{\quad\quad\quad}$，$\boxed{\quad\quad\quad}$，$\boxed{\quad\quad\quad}$

亦即 a＝25，32，40

12. 一最簡分數，其分子、分母之和為70，將其化為小數，並四捨五入後為0.6，求此分數。

【答案】▶ $\frac{27}{43}$

【解析】▶ 可設此分數爲 $\boxed{\quad\quad\quad}$，

其中 $\boxed{\quad\quad\quad}$ 與 $\boxed{\quad\quad\quad}$ 爲二互質之自然數

由已知條件得$0.55\le\frac{70-x}{x}<0.65$，即$\frac{11}{20}\le\frac{70-x}{x}<\frac{13}{20}$

去分母$\begin{cases}11x\le 1400-20x\\ 1400-20x<13x\end{cases}$

解得$42.42\div\frac{1400}{33}<x\le\frac{1400}{31}\div 45.16$，故x＝43，44，45

∴ 此分數爲$\frac{27}{43}$，$\frac{26}{44}$（不合），$\frac{25}{45}$（不合）

牛刀試試

1. 設一最簡分數$\frac{b}{a}$，將其化爲小數，在小數點第二位後四捨五入得 0.54，且 a ＋ b ＝ 20，求此分數。

⇨ $\frac{7}{13}$

2. 一最簡分數之分子與分母差 7，將其化爲小數並四捨五入後得 0.5，求此分數。

⇨ $\frac{6}{13}$或$\frac{8}{15}$

3. a 爲一個二位正整數，若$\frac{105}{a}$爲有限小數，則 a 的最大值爲 ______。

⇨ 96

講道理 道理說清楚，就是好的開始

有理數就是“整數，有限小數，循環小數” 然而，循環小數又該如何化成有理數呢？請！

循環小數

① $0.\overline{a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots\cdots a_n}{\underbrace{999\cdots\cdots\cdots\cdots9}_{n個}}$

② $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}$

$=\dfrac{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m-a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{999\cdots\cdots9}_{m個}\underbrace{00\cdots0}_{n個}}$

立航心得語

舉幾個例子試試

① $0.\overline{3}=$

② $0.\overline{21}=$

③ $0.\overline{213}=$

④ $0.00\overline{3}=$

13. 請將 $a=3.\overline{56}$，$b=8.15\overline{374}$ 化為有理數(分數)的型式。

【答案】▶ $a=\dfrac{353}{99}$，$b=\dfrac{814559}{99900}$

【解析】▶ ① $a=3.\overline{56}$

$100a=356.\overline{56}$

⇨相減可得 $99a=353$ ∴ $a=\dfrac{353}{99}$

② $b=8.15\overline{374}$，則 $100b=815.\overline{374}$，$100000b=815374.\overline{374}$

故 $100000b-100b=815374-815$

$\therefore b=\dfrac{815374-815}{99900}=\dfrac{814559}{99900}$

立航心得語

下列有關循環小數的敘述中，請選出正確的選項。

(1) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=0.\overline{6}+0.\overline{4}$

(2) $0.\overline{72}+0.\overline{28}=1.\overline{1}$

(3) $0.\overline{7}+0.\overline{3}=1$

(4) $0.\overline{5}+0.\overline{5}=1.\overline{1}$

(5) $0.4\overline{9}=0.5$

⇨ (1)(4)(5)

【102 年數學乙】

循環小數化為分數

14. 設 $a,b,c\in\{0,1,2\cdots,9\}$，若 a,b,c 成等差，且滿足 $0.\overline{a}+0.\overline{4b}=1.\overline{2c}$，則 $a=$_____，$b=$_____，$c=$_____。

【答案】▶ $a=7$，$b=5$，$c=3$

【解析】▶ 已知 a,b,c 成等差⇨ $\boxed{}$ 得 $c=2b-a\cdots$①

已知 $0.\overline{a}+0.\overline{4b}=1.\overline{2c}$ ⇨ $\boxed{\text{——}+\text{——}=1+\text{——}}$

通分得 $11a+b-c=79\cdots$②

由①②消去 c 可得 $12a-b=79$

討論整數解 $a=7$，$b=5$，$c=3$

分數化為循環小數

15. 若函數 $f(n)=(\frac{2}{7}$ 寫成小數後的小數點後第 n 位數字) ，則 $f(100)+f(101)+f(102)+f(103)+f(104)+f(105)=$_______。 【台南女中】

立航心得語

<型 1> 直接相除
有理數(分數)表成循環小數
⇨就是 真的除一除 找到循環規律性

【答案】▶ 27

【解析】▶ $\frac{2}{7}=$ $\boxed{\phantom{0.\overline{285714}}}$

故可看出 每 6 位數一回循環

$f(100)+f(101)+f(102)+f(103)+f(104)+f(105)$

$=\boxed{7}+\boxed{1}+\boxed{4}+\boxed{2}+\boxed{8}+\boxed{5}=27$

分數化為循環小數

16. 將分數 $\frac{31927}{49950}$ 化為小數時，小數點後第 58 位數字是________。 【高雄女中】

立航心得語

<型 2> 反面解法
這麼大的數字，可別被嚇到了！
⇨ $\boxed{}$

【答案】▶ 1

【解析】▶

牛刀試試

1. 將 $\frac{365}{7}$ 化爲循環小數，求小數點後第 200 位數爲________。

⇨4 【小港高中】

2. 設實數 $a=1.\overline{36}\times 2.\overline{3}$，則 a 在小數點後第 25 的數字爲________。

【提示】▶ 別被騙了，其實 $a=\frac{35}{11}$ (爲什麼？) 【新莊高中】

⇨1

3. 將 $\frac{1433}{3330}$ 化爲小數時，小數點後第 80 位數字是______。【楠梓高中】

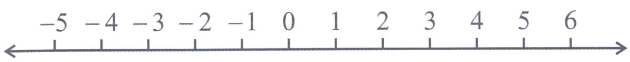
⇨3

4. 設 $a,b,c\in\{1,2,3,\cdots,9\}$，若 $\frac{699}{900}<0.a\overline{bc}<\frac{700}{900}$，求 $(a,b,c)=$______。

⇨(7,7,6)

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

國中時我們學過數線，我們在數線上標上 0 與 1 的點後，整條數線上的刻度就固定下來，因此可以找到對應於每一個整數的點，如下圖所示：

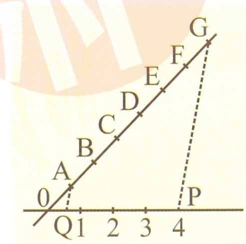


而對任意一個有理數 $\frac{b}{a}$ (a,b 是整數，$a \neq 0$)，如何在數線上找出對應於 $\frac{b}{a}$ 的點呢？

HOME WORK

17. 試在數線上標出代表 $\frac{4}{7}$ 的點

立航心得語



【解析】▶ ①如圖所示，繪一直線 L 與數線交於原點 0

②用圓規在直線 L 上取 7 個點 A,B,C,D,E,F,G，使得 $\overline{OA}=\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FG}$

③在數線上定坐標爲 4 的 P 點，並且連接 $\overline{PG}$

④過 A 點作一直線平行於 $\overline{PG}$，並且交數線於 Q 點

⑤由 $\Delta OAQ \sim \Delta OGP$ 知

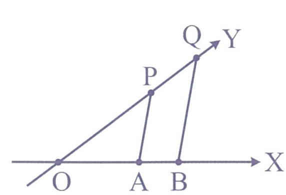
$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OG}}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \overline{OQ}=\frac{1}{7}\overline{OP}=\frac{4}{7}$$

故數線上，Q 點就是代表 $\frac{4}{7}$ 的點

試試看

如右圖所示，O 爲二條數線 $\overleftrightarrow{OX}$ 與 $\overleftrightarrow{OY}$ 的原點，且兩數線的單位等長。已知 $\overline{AP} // \overline{BQ}$ 且在 $\overleftrightarrow{OX}$ 上的坐標分別是 $A(\alpha)$，$B(4.\overline{8})$，而在 $\overleftrightarrow{OY}$ 上的坐標 $P(7.\overline{36})$，$Q(\beta)$，其中 α,β 均爲整數且 $1<\alpha<\beta<10$，則



$\alpha=$________，$\beta=$________。【台南一中】

⇨ $\alpha=4$，$\beta=9$