何明數學家教班 高一上教材

第一章　實數與指數

第一節　實數

【重點一】有理數$\mathbb{Q}$

《重要觀念整理》

(1) 有理數定義：凡是能表示成$\dfrac{q}{p}$(p,q為整數，$p\neq 0$)形式的數均稱為有理數。

將所有有理數所形成的集合以符號$\mathbb{Q}$表示。

即$\mathbb{Q}=\{\dfrac{q}{p}|p,q$為整數，$p\neq 0\}$ 當a是有理數時，

我們用$a\in\mathbb{Q}$表示，符號"$\in$"讀為"屬於"。

【註：正整數所形成的集合以符號$\mathbb{N}$表示，整數所形成的集合以符號$\mathbb{Z}$表示】

---

(2) 封閉性：任意兩有理數的加、減、乘、除(0不能當除數)的結果仍為有理數。

即若$a,b\in Q\Rightarrow a+b,a-b,ab,\dfrac{a}{b}(b\neq 0)\in Q$

---

(3) 循環小數化分數：求$0.3\overline{12}=$________。

解：令$A=0.3\overline{12}$　　$\therefore A=0.3121212\cdots$①

$100A=31.212121\cdots$②

②－①：$99A=31.2-0.3$　　$\therefore A=\dfrac{312-3}{990}=\dfrac{309}{990}=\dfrac{103}{330}$

【歸納】：循環小數化分數　：

① 純循環小數：$0.\overline{a}=\dfrac{a}{9}$，$0.\overline{ab}=\dfrac{ab}{99}$　$0.\overline{abc}=\dfrac{abc}{999}$

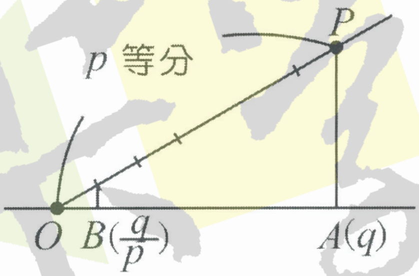
② 混循環小數：$0.a\overline{b}=\dfrac{ab-a}{90}$，$0.a\overline{bc}=\dfrac{abc-a}{990}$，$a.b\overline{cd}=\dfrac{abcd-ab}{990}$

(4) 有理數就是<u>整數</u>、<u>有限小數</u>或<u>循環小數</u>。

(5) 一個已**化成最簡分數**的有理數，如果分母的質因數只有2或5，則這個有理數一定可以化成有限小數。

即：設m,n為兩**互質**的自然數，則$\dfrac{m}{n}$為有限小數$\Leftrightarrow n=2^p\cdot 5^q$（$p$、$q$為非負整數）

(6) 數線上的有理數：每一個有理數在數線上均可以找到一個對應點



(7) 有理數的稠密性 ：

若r,s為任意兩個有理數且$r<s$，則至少存在一個有理數t，使得$r<t<s$。

證明：取$t=\dfrac{r+s}{2}\in Q$，則：$\dfrac{r+r}{2}<\dfrac{r+s}{2}<\dfrac{s+s}{2}\Rightarrow r<t<s$

《甲》 精選範例

1. 假設某最簡分數，其分子與分母之差為7，將其化為小數，並四捨五入後得0.5，試求所有符合之最簡分數的和為________。

解：由題意，可設此最簡分數為$\dfrac{a}{a+7}$　$\therefore 0.45\le\dfrac{a}{a+7}<0.55$

$\Rightarrow\dfrac{9}{20}\le\dfrac{a}{a+7}<\dfrac{11}{20}\Rightarrow\dfrac{63}{11}\le a<\dfrac{77}{9}\Rightarrow 5.7\sim\le a<8.5\sim$

$\therefore$可取$a=6,7,8$　$\therefore$分數為$\dfrac{6}{13},\cancel{\dfrac{7}{14}},\dfrac{8}{15}$

$\therefore$所求$=\dfrac{6}{13}+\dfrac{8}{15}=\dfrac{194}{195}$

【即時重要演練題】

A. 有一最簡分數，分子與分母之和為50，將其化為小數並約至小數點下第一位得0.7，則此分數為________。

5. 有一個七位數 $26mn607$，若 $\dfrac{26mn607}{198}$ 可化為有限小數，

則數對 $(m,\ n)=$________。

6. 酒精溶液 A、B、C 總重分別為 89、139、189 公克，且分別含有酒精 79、129、179 公克，試比較三溶液的酒精濃度大小。(酒精濃度 $=\dfrac{溶質重量}{溶液重量}$)

解：A 溶液濃度 $\dfrac{79}{89}$，B 溶液濃度 $\dfrac{129}{139}=\dfrac{79+50}{89+50}$，$C$ 溶液濃度 $\dfrac{179}{189}=\dfrac{79+100}{89+100}$

$\therefore$ A 溶液濃度 $<$ B 溶液濃度 $<$ C 溶液濃度

總結：$0<a<b$，$0<x<y$，則 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}<\dfrac{a+y}{b+y}$，$\dfrac{b}{a}>\dfrac{b+x}{a+x}>\dfrac{b+y}{a+y}$

【即時重要演練題】

A. 設 $a=7^{108}$，$b=\dfrac{7^{208}+1}{7^{100}+1}$，$c=\dfrac{7^{207}+1}{7^{99}+1}$，則下列何者正確？

(A) $a>b>c$ (B) $b>a>c$ (C) $a>c>b$ (D) $c>a>b$ (E) $b>c>a$

【重點二】無理數

《重要觀念整理》

(1) 數線上，不是有理數的數稱為無理數(無法表為 $\frac{q}{p}$ (p,q 為整數，$p \neq 0$)形式的數，即不循環的無限小數)。

例如：π，$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，……

---

(2) 證明 $\sqrt{2}$ 為無理數。

證明：設 $\sqrt{2}$ 為有理數，令 $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$， p,q 為正整數，

$\therefore q=\sqrt{2}p$ 即 $q^2=2p^2$

觀察 2 次方，q^2 為偶數次，$2p^2$ 為奇數次

$\therefore q^2$ 一定不會等於 $2p^2$，此結果與 $q^2=2p^2$ 不符

$\therefore \sqrt{2}$ 無法寫成 $\frac{q}{p}$， p,q 為整數的形式　$\therefore \sqrt{2}$ 為無理數

---

(3) ① 將 $\sqrt{2}$ 化為小數，則必為無限且不循環小數，即無理數必為無限且不循環小數。

② 試以計算機求 $\sqrt{2} \approx \underline{1.414213562}$。(計算機按 2 SHIFT x^2)

③ 可以用有理數逼近無理數。

例如以計算機檢查 $(1.4)^2<2<(1.5)^2$，$(1.41)^2<2<(1.42)^2$，

$(1.414)^2<2<(1.415)^2$，$(1.4142)^2<2<(1.4143)^2$，…

---

(4) 設 a,b 均為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=b=0$。

證明：假設 $b \neq 0$，則 $\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$ 為一有理數(矛盾)　$\therefore b=0 \Rightarrow a=0$

---

(5) 設 a,b,x,y 均為有理數，若 $a+b\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$，則 $a=x$，$b=y$。

證明：$\because a+b\sqrt{2}=x+y\sqrt{2}$　$\therefore (a-x)+(b-y)\sqrt{2}=0$

由(2)得 $a-x=0$，$b-y=0 \Rightarrow a=x$，$b=y$

[型一]：無理數的運算(一)

《甲》精選範例

1. 設x,y為有理數，$x-6y+4\sqrt{3}y-2+\sqrt{3}=0$，則$x=$________，$y=$________。

【即時重要演練題】

A. 已知有理數a,b滿足$(a+2\sqrt{3})^2=b+4\sqrt{3}$，則$a=$________，$b=$________。

[型二]：無理數的運算(二)

《甲》精選範例

1. 化簡$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$________。

【即時重要演練題】

A. 化簡$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{6}}=$________。

2. 設$a=\sqrt{10}+\sqrt{2}$，$b=3+\sqrt{3}$，$c=\sqrt{7}+\sqrt{5}$，試比較a,b,c之大小。

解：$a=\sqrt{10}+\sqrt{2}\Rightarrow a^2=12+2\sqrt{20}$

$b=\sqrt{9}+\sqrt{3}\Rightarrow b^2=12+2\sqrt{27}$

$c=\sqrt{7}+\sqrt{5}\Rightarrow c^2=12+2\sqrt{35}$

$\therefore a^2<b^2<c^2\Rightarrow a<b<c$

【即時重要演練題】

A. $a=\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}, b=\sqrt{2}+\sqrt{7}+\sqrt{14}, c=\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{11}$，則$a,b,c$的大小關係為________。

3. 設$a=\sqrt{5}-2$，$b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$，$c=\sqrt{7}-\sqrt{6}$，試比較a,b,c之大小。

解：$\because \dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$

$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$

$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\sqrt{7}+\sqrt{6}$　　$\therefore \dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}\Rightarrow c<b<a$

【即時重要演練題】

A. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $\sqrt{13}>3.5$　(2) $\sqrt{13}<3.6$　(3) $\sqrt{13}-\sqrt{3}>\sqrt{10}$

(4) $\sqrt{13}+\sqrt{3}>\sqrt{16}$　(5) $\dfrac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{3}}>0.6$　【103學測】

4. 已知k為正整數，且滿足$\frac{k}{11}<\sqrt{5}<\frac{k+1}{11}$，試問$k$值為________。

【即時重要演練題】

A. 設k為一整數，已知$\frac{k}{3}<\sqrt{31}<\frac{k+1}{3}$，則$k=$________。　【102年學測】

[型三]：無理數的運算(三)

《重要觀念整理》

(1) $a,b>0$時，$\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 。

(2) $a>b>0$時，$\sqrt{a+b-2ab}=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 。

《甲》精選範例

1. (1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$________ 。　　(2) $\sqrt{14-4\sqrt{10}}=$________ 。

(3) $\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=$________ 。

【即時重要演練題】

A. 設x,y為有理數，且$x+y\sqrt{16+\sqrt{252}}=x\sqrt{8-\sqrt{28}}+5$，則$x^2+y^2=$________ 。