立航數學

數與式

1-1 數與數線上的幾何

數系
有理數
無理數
實數

1-2 式的運算

算幾不等式
乘法公式
絕對值運算

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

實數的系統是數學的基礎結構，許多數學分支都在此植根，開花、結果。我們將實數系統整理成下面的圖表：

- 實數R ⇨
  - 有理數Q ⇨
    - 整數Z ⇨
      - 負整數
      - 零
      - 正整數N
    - 小數 ⇨
      - 有限小數
      - 循環小數
  - 無理數（不循環的無限小數）

有理數（rational number）

在數學上，凡能表成 $\frac{a}{b}(a,b\in Z\text{ ， }b\neq 0)$ 形式的數，我們稱它為“有理數”

(1)加法：$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$

(2)減法：$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$

(3)乘法：$\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac}$

(4)除法：$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}=\frac{bc}{ad}$

由上述運算可知：加減乘除對於有理數系都有封閉性。
也就是說四則運算在有理數系中已經沒有缺陷。

立航心得小語

有理(rational)是外文的誤譯，本來，rational = ratio ，意思是 成比例的數

無理數（irrational number）

在數線上，還有許多不能表成分數的數，我們稱為“無理數”。
它們表成小數時，都是 不循環的無限小數

立航心得小語

有理數與無理數合在一起，畫出數線上所有的點，它們一起就構成了實數

隨堂試試

是非題：

1.(　)凡型如 $\frac{q}{p}$ 的數皆稱為有理數。

2.(　)任意二個有理數做加、減、乘、除的結果仍為有理數。

3.(　)任意二個無理數做加、減、乘、除的結果仍為無理數。

⇨1.×　2.×　3.×

講道理 道理說清楚，就是好的開始

在數線上，整數是離散分布的，也就是說

在數線上任兩相異整數之距離最小為 1

我們稱這個性質為整數的離散性。意即

設 $a,b\in Z$，若 $a\neq b$，則 $\boxed{|a-b|\geq 1}$

1. 設 a,b,c 均為整數，且 $3|a-1|+2|b-2|+|c-3|=2$，則滿足上述的序組 (a,b,c) 共有________組。

【答案】▶ 4 組

【解析】▶ (1) 由整數離散性知 $|a-1|=\boxed{0}$　$\therefore a=1$

(2) 當 $|b-2|=\boxed{0}$ 時⇨ $|c-3|=\boxed{2}$

$\therefore b=2$ 且 $c=1$ 或 5 有二組解

(3) 當 $|b-2|=\boxed{1}$ 時⇨ $|c-3|=\boxed{0}$

$\therefore b=1$ 或 3 且 $c=3$ 有二組解

2. 設 x,y,z 均為整數，則方程式 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6$ 有________組解。

【答案】▶ 24 組

【解析】▶ 方程式應呈現 $\boxed{1}+\boxed{1}+\boxed{4}=6$ 的關係

而將 $(1,1,4)$ 分配給 $(x-1)^2$，$(y-2)^2$，$(z-3)^2$ 共有 $\boxed{3}$ 種情形

而每一種情形的所得的 (x,y,z) 的解各有 $\boxed{8}$ 種解

$\therefore$ 共有 $3\times 8=24$ 組解

隨堂試試

1. 滿足 $|a-1|+2(b-2)^2=3$ 之整數解 (a,b) 共有幾組？

⇨6

2. 滿足 $(a-1)^2+2\sqrt{(b-2)^2}=3$ 之整數解 (a,b) 共有幾組？

⇨4

3. 滿足 $|a-1|+2|b-2|+3|c-3|=3$ 之整數解 (a,b,c) 共有幾組？

⇨8

講道理 道理說清楚，就是好的開始

在數線上，有理數是密集分佈的。也就是說

任意兩個相異有理數之間至少有一個有理數

我們稱這個性質為有理數的稠密性(denseness)，意即

設 $a,b\in Q$，若 $a<b$，則存在 $c\in Q$

使得 $\boxed{\qquad\qquad}$

公式證明

3. 設 a,b 皆為有理數，$a<b$，試證存在一個有理數 c，使 $a<c<b$。

【證明】▶ 令 $c=\boxed{\qquad\qquad}$

① $c-a=\dfrac{a+b}{2}-a=\dfrac{b-a}{2}>0\quad\therefore c>a$

② $b-c=b-\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{b-a}{2}>0\quad\therefore b>c$

由①②知存在一有理數 c 滿足 $a<c<b$ 得證

立航心得語

我們常使用 相減法

判斷二個數的大小

若 $x-y>0$

則 $\boxed{\qquad}$

公式變化

4. 設 a，b 皆為有理數，$a<b$，試證存在一個無理數 c，使 $a<c<b$。

【證明】▶ 令 $c=\boxed{\dfrac{\qquad}{\qquad}}$

$\therefore c=(a-b)\sqrt{2}+(2b-a)$ 故 c 必為無理數

① $c-a=(b-a)(2-\sqrt{2})>0\quad\therefore c>a$

② $c-b=(b-a)(1-\sqrt{2})<0\quad\therefore c<b$

故存在一個無理數 c，使 $a<c<b$

簡單試試

是非題

1.(　)$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 之間有無限多個有理數。 【高師大附中】

2.(　)若 a,b 為實數且滿足 $a<b$，則 $a<\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3}b}{\sqrt{6}}<b$。

⇨1. ○　2. × 【建國中學】

講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

在稠密性的證明中，若能加上數線上的分點公式就可瞭解這些數字所代表的幾何意義，進而推廣出其它稠密性的應用。

立航心得語

內分點公式的記法

⇨ $\boxed{\quad\quad\quad}$

內分點公式

在數線上有二已知點 A(a)，B(b)，若點 P(x) 在 A、B 之間，且知 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

立航心得語

外分點公式的要訣

⇨ $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\boxed{\quad\quad\quad}$

外分點公式

在數線上有二已知點 A(a)，B(b)，若點 P(x) 在 A、B 之外，且知 A－B－P 並滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{-na+mb}{m-n}$$

中點公式

若 P(x) 為 $\overline{AB}$ 之中點，意即 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:1$，則

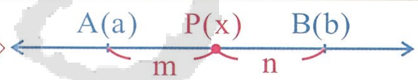
$$x=\frac{a+b}{2}$$

公式證明

5. 在數線上有二已知點 A(a)，B(b)，若點 P(x) 在 A、B 之間，且知 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則

$$x=\frac{na+mb}{m+n}$$

【證明】▶ 繪出數線 ⇨



已知 $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{m}{n}$

亦即 $\boxed{\quad\quad\quad}=\dfrac{m}{n}$

$\therefore nx-na=mb-mx$ 故得 $x=\dfrac{na+mb}{m+n}$

進階試試

試證明外分點公式：

在數線上有二已知點 A(a)，B(b)，若點 P(x) 在 A、B 之外，且知 A－B－P 並滿足 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 $x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$

6. A(−3)，B(x)，C(y)，D(8) 是數線上由左而右的四個點，已知 $\overline{AB}=2\overline{BC}=3\overline{CD}$，則 x = ______，y = ______。

【台南一中】

【答案】▶ x = 3，y = 6

【解析】▶ 已知 $\boxed{\overline{AB}=2\overline{BC}=3\overline{CD}}$ 可得 $\dfrac{\overline{AB}}{6}=\dfrac{\overline{BC}}{3}=\dfrac{\overline{CD}}{2}$

繪出數線 ⇨ ⟷，請！

立航心得語

若所求的點確定在二已知點之內

⇨就只使用 內分點公式 得到一組解

7. 設 A、B、C 這三個點在數線上的坐標分別是 −5、7 及 x，且滿足 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:5$，則 x = ______。【建國中學】

【答案】▶ $-\dfrac{1}{2}$ 或 −23

【解析】▶

立航心得語

若所求的點無法確定與已知點的關係

⇨就應分別使用 內分點 與 外分點 而得到二組解

牛刀小試

設數線上三點 A(−5)，B(9)，P(x)，已知 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$，則 x = ______。 【鳳山高中】

⇨1 或 −47

8. 設 a,b 為實數，a < b，數線上

$A(\dfrac{2a+5b}{7})$，$B(\dfrac{5a+b}{6})$，$C(\dfrac{5a+9b}{14})$，$D(\dfrac{6a+b}{7})$

試依左而右的順序寫出 A,B,C,D 在數線上的位置。

【高雄女中】

【答案】▶ D − B − C − A

【解析】▶ 繪出數線 ⇨ ⟷

立航心得語

$\dfrac{na+mb}{m+n}$ 比大小的要訣

⇨ $\boxed{}$

牛刀小試

下列哪一個數值最大?

(A) $\dfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{5}$ (B) $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{5}$ (C) $\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{7}$ (D) $\dfrac{4\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{7}$ (E) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

⇨(A) 【中山女中】