第一單元　極限與連續

數系：

自然數　$N := \{1,2,3,\cdots\}$

整數　$Z := \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$

有理數　$Q := \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p,q \in Z,\, q \neq 0 \right\}$

複數　$C := \{a+bj \mid a,b \in R\}$

定理：

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$$

附註：微積分只討論到實數。

一、函數的極限：

設 $f(x)$ 為定義在集合 A 上之函數，若對每一個正數 ε ，存在一個正數 δ ，使得當 $0<|x-a|<\delta$ 時，恆有 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ ，則稱 ℓ 為函數 $f(x)$ 在 a 之極限，記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$

二、極限的重要性質

若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ ， $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ 則

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)=A\pm B$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)=A\cdot B$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ (但 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$)

直接代入法：若直接帶入有意義（分母不為零，開偶次根號內 >0）即可直接代入。當 $x \to a$ 時，僅表示 x 很接近 a，並不表示 $x = a$

1. (i) $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^3 - 3x^2 + 4\right) =$

   (ii) $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt{3x - 2 + \sqrt{x+1}} =$

Sol:

2. (i) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 + 2x + 2}{4x - 2} =$

   (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^3 + 2^{x+3}\right) \times \sin(5x) =$

Sol:

【試題追蹤】

答：$\frac{4}{5}$

1. 求 $\lim_{x\to1}\frac{5x-1}{2x+3}=?$

2. $\lim_{x\to0}\frac{\cos(x^2+6x)}{3^{x+2}}=?$ (A) $\frac{1}{9}$ (B) 1 (C) **錯誤！尚未定義書籤。錯誤！尚未定義書籤。** -1 (D) 以上皆非 。

答：(A)

3. $\lim_{x\to1}(x^2+2x+3)\times\log_4(5x-1)=?$ (A) 0 (B) 1 (C) **錯誤！尚未定義書籤。錯誤！尚未定義書籤。** 6 (D) 以上皆非 。

答：(C)

4. 求 $\lim_{x\to1}\sqrt[3]{20x+6+\sqrt{x^2+x-1}}=$ 【淡江】 答：3

5. 求 $\lim_{x\to8}\sqrt{3x-2+\sqrt{x+1}}=$ 【台大】 答：5

Limit 問題之解題要訣：

若不能直接代入獲得答案，則建議使用下述方法求解：

1. 通分
2. 約分
3. 有理化
4. L'Hospital' Theorem
5. 大哥法
6. 夾擊定理
7. 三角框框定理
8. 變數變換法
9. 指數框框定理
10. 定積分
11. 冪級數
12. $\varepsilon-\delta$ 法〔用於證明題〕