學測易經

林岳數學

- 針對大學學測
  → 簡易的複習方法
- 針對大考中心
  → 變易的命題趨勢
- 針對高三生涯
  → 不易的學習規劃

LIHUNG MATH LIHUNG MATH LIHUNG MATH LIHUNG MATH LIHUNG MATH LIHUNG MATH

學測易經

林岳數學

目錄 Contents

數學I 函數

實數系

(1)有理數

① 定義

凡能表成 $\frac{a}{b}(a,b\in Z,b\neq 0)$ 形式的數，即為有理數

② 性質

(i) 整數的離散性：設 $a,b\in Z$ 且 $a\neq b$，則 $|a-b|\geq 1$

(ii)有理數的稠密性：設 $a,b\in Q$

若 $a<b$，則存在 $c\in Q$，使得 $a<c<b$

(iii)有理數有封閉性：任二個有理數之加減乘除(其中分母不為 0)，

其結果仍為有理數。

③ 有限小數

設 $a,b\in N$，$b<a$ 且 a,b 互質

則 $\frac{b}{a}$ 為有限小數的充要條件就是 a 必為 $\boxed{\quad}$ 的型式

④ 循環小數

(i) $0.\overline{a_1a_2\cdots\cdots\cdots\cdots a_n}=\dfrac{a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_n}{\underbrace{999\cdots\cdots\cdots 9}_{n個}}$

(ii) $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}=\dfrac{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m-a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{999\cdots\cdots 9}_{m個}\underbrace{00\cdots 0}_{n個}}$

(2) 無理數

① 定義

在數線上還有許多不能表成分數的數，稱為無理數

它們表成小數時，都是不循環之無限小數。

② 分群特性

(i)有理數與無理數的分群

設 $a,b,c,d\in Q$，若 $a\sqrt{2}+b=c\sqrt{2}+d$，則 $\boxed{\quad}$ 且 $\boxed{\quad}$

(ii)無理數與無理數的分群

設 $a,b,c,d\in Q$，若 $a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c\sqrt{2}+d\sqrt{3}$，則 $\boxed{\quad}$ 且 $\boxed{\quad}$

(iii)常見的考法

設 a，b 是有理數，x，y 是無理數，

若 $a+x=b+y$，則 $\boxed{\quad}$ 且 $\boxed{\quad}$

③ 有理數與無理數的判別

(i)有理數的運算

設 a，b 均為有理數，且 $b\neq 0$，則 $a+b,a-b,a\times b,a\div b$ 都是有理數

(ii)無理數的運算

設 a，b 均為無理數，則 $a+b,a-b,a\times b,a\div b$

不一定是有理數，亦不一定是無理數。(為什麼？)

(iii)有理數與無理數的運算

設 a 是有理數，b 是無理數，則 $a+b,a-b$ 一定是無理數

$a\times b,a\div b$ 則不一定(a 有可能是 0)

④ 雙重根號

無理數的計算，常以根號的型式考出，需注意一個公式

由 $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=a+b\pm 2\sqrt{ab}\ (a>b>0)$

可得 $\boxed{\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

不等式

(1) 比大小

① 一般式子

對於一般的實數式子欲判斷其次序(即比較大小)，就是

(i)相減法

(ii)平方相減法

② 根號式子

(i)最簡單的想法 ⇨ 直接猜測 近似值

(ii)根號內的 數字和 都相同 ⇨ 平方消去根號

(iii)根號內的 數字差 都相同 ⇨ 有理化 消去根號

(2) 不等式性質

設 a、b、c 為任意實數

三一律：$a>b$，$a=b$，$a<b$ 恰有一式成立

遞移律：$a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$

消去律：$a>b$ 的充要條件為 $a+c>b+c$

消去律：$c>0$，則 $a>b$ 的充要條件為 $ac>bc$

$c<0$，則 $a>b$ 的充要條件為

(3) 算幾不等式

① 基本公式

假設 n 個正實數 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n$，

則滿足 $\dfrac{\quad}{\quad} \geq \sqrt{\quad}$

且知等號成立時，必定滿足

② 使用時機

(i)正數之和與乘積的條件

(ii)正數之互為倒數相加的條件

乘法公式

(1) 二元轉換式

① 原則

碰到二元(二個變數)多項式的問題，常可採取

先定出 $a+b$ 與 ab 二個單位，然後將 a^n+b^n 轉換之

② 公式

$a^2+b^2=$

$a^3+b^3=$

$a^3-b^3=$

$a^4+b^4=$

(2) 二元分解式

① 一般

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

② 高次

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b-\cdots+b^{2n})$

(3) 三元轉換式

① 二次

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=$

② 三次

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c)\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$

命題趨勢

1. 滿足 $|a-1|+2(b-2)^2=3$ 之整數解 (a,b) 共有________組。

答案 6

解析

2. (1)下列各有理數何者可化為有限小數？
(A) $\frac{41}{16}$ (B) $\frac{137}{15}$ (C) $\frac{7}{50}$ (D) $\frac{1}{512}$ (E) $\frac{21}{15}$
(2)若 a 為一位正整數，且 $\frac{7a621}{84}$ 為有限小數，則 $a=$________。

答案 (1) (A)(C)(D)(E)　(2) 5

解析

心得小語

$\frac{b}{a}$ 為有限小數
⇨ a 必為 $\square$ 型式

動手試試

設 $\frac{21}{a}$ 為最簡分數且 $\frac{21}{a}$ 可化為有限小數，若 $\frac{1}{2}<\frac{21}{a}<1$，則 $a=$________。
⇨ 25 或 32 或 40

3. 試將 $a=3.\overline{56}$，$b=8.15\overline{374}$ 化為有理數(分數)型式。

答案 $a=\frac{353}{99}$，$b=\frac{814559}{99900}$

解析 $a=3.\overline{56}$　$100a=356.\overline{56}$
⇨相減可得 $99a=356-3$
$\therefore a=\frac{356-3}{99}=\frac{353}{99}$　$b=8.15\overline{374}$
則 $100b=815.\overline{374}$　$100000b=815374.\overline{374}$
故 $100000b-100b=815374-815$
$\therefore b=\frac{815374-815}{99900}=\frac{814559}{99900}$

心得小語

循環小數化分數

(1) $0.\overline{a_1a_2\cdots a_n}=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{n個}}$

(2) $0.a_1a_2\cdots a_n\overline{b_1b_2\cdots b_m}$
$=\frac{a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_m-a_1a_2\cdots a_n}{\underbrace{99\cdots9}_{m個}\underbrace{00\cdots0}_{n個}}$

(3) $0.\overline{9}\ \square\ 1$

4. (1)設 $f(n)$ 表示 $\frac{4}{7}$ 化為小數，小數點後第 n 位數字，則 $f(520)=$________。
(2)將 $\frac{31927}{49950}$ 化為小數時，小數點後第 58 位數字為________。

答案 (1) 4　(2) 1

解析

心得小語

分數化為循環小數
(法 1)直接相除
(法 2)分母化為 $\square$ 型式

動手試試

1. 設 $a,b,c\in\{0,1,2,\cdots,9\}$，若 a, b, c 成等差，且滿足 $0.\overline{a}+0.\overline{4b}=1.\overline{2c}$
則 $a=$______，$b=$______，$c=$______。　⇨ $a=7$，$b=5$，$c=3$

2. $\frac{5}{7}=0.a_1a_2a_3\cdots$，小數點後第 n 位數字為 a_n，則
(1) $a_4=$______。(2) $a_{1997}=$______。　⇨ (1) 2　(2) 8

5. 設 a、b、c∈R，則下列敘述何者正確？
(A)若 $a+b$、$a-b\in Q$，則 $a,b\in Q$
(B)若 $a\cdot b$，$\frac{b}{a}\in Q$，則 $a,b\in Q$
(C)若 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$，則 $a=c$ 且 $b=d$
(D)若 $a+b\sqrt{2}=0$，則 $a=0,b=0$
(E)若 a^{24}、$a^{27}\in Q$，則 $a^{3}\in Q$

心得小語
1.有理數具有 封閉性
2.$a^{x}\in Q$，$a^{y}\in Q$，
則只能確認 $a^{(x,y)k}\in Q$

答案 (A)(E)

解析 (A) $a=\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\in Q$，$b=\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\in Q$
(B) $a\cdot b\times\frac{b}{a}=b^{2}\in Q$，但 b 不能確定
(C)找個反例吧：
(D)找個反例吧：
(E) $(24,27)=3$，$a^{24}\in Q$，$a^{27}\in Q$，則 $\boxed{}\in Q$

6.若已知 a , b 為有理數，且 $(a+b\sqrt{3})^{2}=37-20\sqrt{3}$，
則 $a+b$ 之值為何？

心得小語
$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}$
$=\boxed{}$

答案 ±3

解析【方法 I】分群特性
$(a+b\sqrt{3})^{2}=a^{2}+3b^{2}+2ab\sqrt{3}=37-20\sqrt{3}$
$\therefore\begin{cases}a^{2}+3b^{2}=37\\2ab=-20\end{cases}$ 解得 $a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$

【方法 II】開雙重根，請！

動手試試

1.有關於“有理數”的敘述，哪些選項是正確的？
(1)有理數一定可以化為有限小數的形式
(2)若 a、b 為無理數，則 $a+b$ 為無理數
(3)若 a^{7} 為有理數且 a^{5} 為有理數，則 a 為有理數
(4)若 $a+b$ 為有理數且 $a-b$ 為有理數，則 a 為有理數且 b 為有理數
(5)若 a^{3} 為有理數，則 a 為有理數 ⇨ (3)(4)

2.已知 m、n 均為正整數，而且 m、n 互質，則下列敘述何者正確？
(1) $\frac{n}{m}$ 不可能為正整數 (2) $\frac{n}{m}$ 必為複數 (3) $\frac{n}{m}$ 必為有理數
(4) $\sqrt{m}$ 必為無理數 (5) $\sqrt{3m}$ 必為無理數 ⇨ (2)(3)(5)

3.試求 $\sqrt{257+120\sqrt{2}}+\sqrt{57+40\sqrt{2}}=$______。 ⇨ $20+8\sqrt{2}$

4.已知 $a=\sqrt{6+\sqrt{35}}$，試求 $a+\frac{1}{a}=$______。 ⇨ $\sqrt{14}$

7.設無理數 $\sqrt{14-4\sqrt{10}}=a+b$，其中 a 為整數部份，b 為正小數部份，則 $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+5}$ 之值為______。

心得小語
整數部分
⇨猜測估計 $\boxed{}$
小數部分
⇨原數－整數部份

答案 $\frac{2}{3}$

解析

8.正數 a 的小數部分為 b，$0<b<1$，若 $a^{2}+b^{2}=38$，求 $a=$______。

答案 $3+\sqrt{10}$

解析

9.試求：(1) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}=$______。(2) $\frac{4}{1+\sqrt{5}-\sqrt{24}}=$______。

心得小語
處理根號的想法
1. 直接平方
2. 有理化
3. 乘法公式

答案 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$

解析

動手試試

1.設 a 的小數部分為 b，且 $a+b^{2}$ 為正整數，則 $b=$______。 ⇨ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
2.設 x 為正整數，若 $f(x)$ 表 $\sqrt{x}$ 的整數部分，
則 $f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=$______。【中區模考】 ⇨ 625