



天月

數學

Hermin math

何明數學家教班 學測複習教材(數 AB)

第一單元：實數系

第一節：數與數線

【重點一】 有理數(Q)與無理數

【重要觀念整理】

- (1) 有理數定義：
凡是能表示成_____形式的數均稱為有理數。
- (2) 任意兩有理數的加、減、乘、除(0不能當除數)的結果仍為有理數。
- (3) 有理數就是_____、_____或_____。
- (4) 有理數的稠密性：
若 r, s 為任意兩個有理數且 $r < s$ ，則至少存在一個有理數 t ，使得 $r < t < s$ 。
[註]：將所有的「有理數」改為「實數」即為「實數的稠密性」。
- (5) 一個已化成最簡分數的有理數，如果分母的質因數只有2或5，則這個有理數一定可以化成有限小數。
[註]：設 m, n 為兩互質的自然數，則 $\frac{m}{n}$ 為有限小數 $\Leftrightarrow n = 2^p \cdot 5^q$ (p, q 為非負整數)
- (6) 數線上，不是有理數的實數稱為無理數(即不循環的無限小數)，
如： $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots$

《甲》 精選範例

1. 設 a, b, c, d 為正整數且 $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{37}{11}$ 時, $a + b + c + d =$ _____。

2. 求 $0.\overline{312} =$ _____。

解：令 $A = 0.\overline{312}$ $\therefore A = 0.3121212\cdots$ ① $100A = 31.212121\cdots$ ②

① - ② : $-99A = 0.3 - 31.2$ $\therefore A = \frac{312 - 3}{990} = \frac{309}{990} = \frac{103}{330}$

【歸納】：① $0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$, ② $0.a\overline{bc} = \frac{abc - a}{990}$

【即時重要演練題】

A. 化簡 $0.06\overline{45} =$ _____。

3. 有一最簡分數，分子與分母之和為 70，將其化為小數並四捨五入後得 0.6，則此分數為_____。

4. 下列何者可化為有限小數？

(A) $\frac{283}{350}$ (B) $\frac{63}{128}$ (C) $\frac{147}{168 \times 125}$ (D) $\frac{149}{21 \times 40}$ (E) $\frac{56}{25^9}$

5. 設 $a = \frac{2009^{88}}{2009^{55}}$, $b = \frac{2009^{88} + 1}{2009^{55} + 1}$, $c = \frac{2009^{55} + 1}{2009^{22} + 1}$, 則下列何者正確？

(A) $a > b > c$ (B) $b > a > c$ (C) $a > c > b$ (D) $c > a > b$ (E) $b > c > a$

※討論： $0 < a < b$, $0 < x < y$

(1) $\frac{a}{b} \square \frac{a+x}{b+x} \square \frac{a+y}{b+y}$ (2) $\frac{b}{a} \square \frac{b+x}{a+x} \square \frac{b+y}{a+y}$

解： $a = \frac{2009^{88}}{2009^{55}} > 1$, $b = \frac{2009^{88} + 1}{2009^{55} + 1}$, $c = \frac{2009^{88} + 2009^{33}}{2009^{55} + 2009^{33}}$ $\therefore a > b > c$

6. 設 $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{b} - \frac{1}{a+b-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若一正數 a 之小數部分為 b ，且 $a^2 + b^2 = 18$ ，則 $a+b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

8. 選出正確選項：

- (1) 若 a, b 均為無理數，則 $a+b$ 為無理數。
- (2) 若 a, b 均為無理數，則 ab 為無理數。
- (3) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 $a+b$ 為無理數。
- (4) 若 a 為有理數， b 為無理數，則 ab 為無理數。
- (5) 若 $a-b$ ， $a+b$ 都是有理數，則 a, b 均為有理數。

解：(1) 不一定，例： $a = \sqrt{2}$ ， $b = -\sqrt{2}$ ， $a+b=0$ 為有理數

(2) 不一定，例： $a = \sqrt{2}$ ， $b = -\sqrt{2}$ ， $ab = -2$ 為有理數

(3) 正確

(4) 不一定，例： $a = 0$ ， $b = \sqrt{2}$ ， $ab = 0$ 為有理數

(5) $a = \frac{1}{2}[(a+b) + (a-b)] \in \mathbb{Q}$ $b = \frac{1}{2}[(a+b) - (a-b)] \in \mathbb{Q}$

9. 下列何者正確？

- (1) 若 a^3 為有理數，且 a^5 為有理數，則 a 為有理數。
- (2) 若 a^6 為有理數，且 a^9 為有理數，則 a 為有理數。
- (3) 若 a, b 均為無理數，則 $a+b$ 也是無理數。
- (4) 若 a, b 均為有理數($ab \neq 0$)，則 $a+b$ 、 $\frac{a}{b}$ 也是有理數。
- (5) 若 a, b 均為實數， $a+b$ 為有理數， ab 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數。

《乙》 重要練習題

1. 將 $\frac{131}{990}$ 化為小數時，小數點後第100位數字為_____。

答：3

2. 下列哪些有理數可化成有限小數？

(1) $\frac{23}{8}$ (2) $\frac{13}{30}$ (3) $\frac{49}{350}$ (4) $\frac{1}{27}$ (5) $\frac{11}{20}$

答：(1)(3)(5)

3. 設 a, b, c, d 為正實數，且 $a < b, c < d$ ，則下列何者成立？

(A) $a < \frac{2a+5b}{7} < b$ (B) $\frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c} < \frac{b+d}{a+d}$ (C) $\frac{a}{b} > \frac{a+d}{b+d} > \frac{a+c}{b+c}$

(D) 若 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ ，則 $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ (E) $a < \frac{4a+5b}{7} < b$

答：(A)(D)

4. 設 k 為一整數，已知 $\frac{k}{3} < \sqrt{31} < \frac{k+1}{3}$ ，則 $k =$ _____。【102年學測】

答：16

5. 設 x 為自然數，若 $\sqrt{3}$ 介於 $\frac{x+5}{x}$ 與 $\frac{x+6}{x+1}$ 之間，則 x 之值為_____。

答：6

6. 已知 $1 \leq n \leq 50$ ，有多少個數 n 可以使得 $\sqrt{(9+2n)+\sqrt{72n}}$ 為整數？

(A) 3個 (B) 4個 (C) 5個 (D) 6個 (E) 7個 【100新竹中學】

答：(C)

7. 設 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ，則下列何者與 a 相等？

(1) 0.62 (2) $\frac{1}{a}+1$ (3) $\frac{1}{a-1}$ (4) a^2-1 (5) $\sqrt{a+1}$

答：(2)(3)(4)(5)

8. 設 $\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 的整數部分為 a ，小數部分為 b ，則 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} =$ _____。

答： $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

9. 當 n, k 都是正整數時，若 $n < \sqrt{k} < n+1$ ，則 \sqrt{k} 一定是無理數。試問下列哪些選項一定是無理數？

(1) $\sqrt{n^2+1}$ (2) $\sqrt{n^2+11}$ (3) $\sqrt{n^2+n}$ (4) $\sqrt{n^2+3n}$

答：(1)(3)

10. 若實數 a, b, c 滿足 $abc > 0$ ， $ab+bc+ca < 0$ ， $a+b+c > 0$ ， $a > b > c$ 則下列何者為真？

(1) $a > 0$ (2) $b > 0$ (3) $c > 0$ (4) $|a| > |b|$ (5) $a^2 > c^2$

【91年學測】

答：(1)(4)(5)

11. 若 a, b 為整數， $\sqrt{(a-1)^2} + 2|b+1| = 4$ ，則數對 (a, b) 共有 _____ 組解。

答：8

12. 下列哪些敘述是正確的？

- (A) 若 $a+b, a-b$ 是有理數，則 a, b 是有理數。
(B) 若 $a \times b, a \div b$ 是有理數，則 a, b 是有理數。
(C) 若 a^{2005}, a^{94} 是有理數，則 a 是有理數。
(D) 若 $a+b$ 是有理數， ab 是無理數，則 $a-b$ 是無理數。
(E) 若 a, b 是有理數且 $a+b\sqrt{3} = 0$ ，則 $a=b=0$ 。

答：(A)(C)(D)(E)

13. 試問下列敘述何者為真？

- (A) $\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{3}$ 之間有無窮多個有理數。
(B) 若 a^3 為有理數，且 a^5 是有理數，則 a 是有理數。
(C) 若 a 是有理數， b 是無理數，則 ab 是無理數。
(D) 若 a, b 都是無理數，且 $2a+b$ 是有理數，則 $a+2b$ 必是無理數。
(E) 若 a, b 均為實數， $a+b$ 為有理數，且 ab 為無理數，則 $a-b$ 必為無理數。

答：(A)(B)(D)(E)