立航數學

空間向量

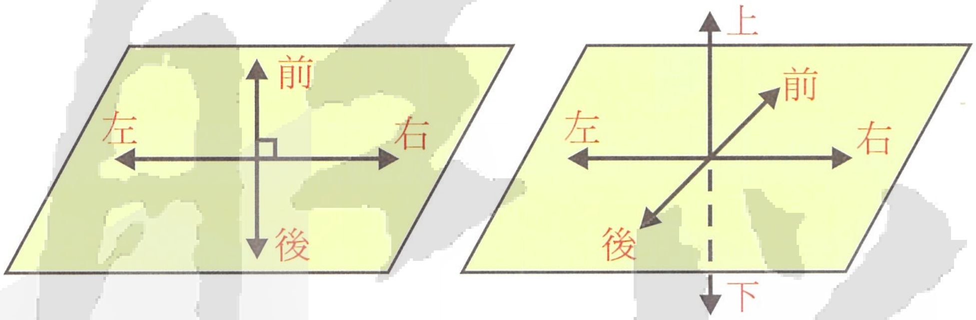
講道理 道理說清楚，就是好的開始

三度空間中的基本圖形就是點、線與平面，由這一章開始，我們要將視野由平面擴展到立體，就應先搞定這些基本圖形之間的關係，請！

空間

①二度空間(平面)：

過平面上任意點，想在平面上作一組兩兩互相垂直的直線時，這組直線只能有兩條。我們可以把這兩條線想像成代表“前後”與“左右”兩個方向。(如左下圖)



②三度空間(空間)：

過空間中任意點，想在空間中作一組兩兩互相垂直的直線時，這組直線可以有三條。我們可以把這三條直線想像成代表“前後”，“左右”與“上下”三個方向。(如右上圖)

> **立航心得小語**
>
> 其實，我們所存在的空間應為“四度空間”，那表示除了考慮“前後”，“左右”與“上下”之外，還需加上時間這個觀點

二直線之間的關係

空間中二條相異直線有如下的關係

❶交於一點。

❷平行線：共平面而無交點的二直線。

❸歪斜線：不平行且不相交的二直線(不共平面)。

決定一平面的條件

空間中，下列條件恰可決定一個平面

❶不共線的相異三點

❷一直線與線外一點

❸二相交直線

❹二平行直線

直線與平面之間的關係

空間中，一條直線與一個平面有如下的關係

❶平行⇨直線與平面沒有交點

❷相交⇨直線與平面恰交一點

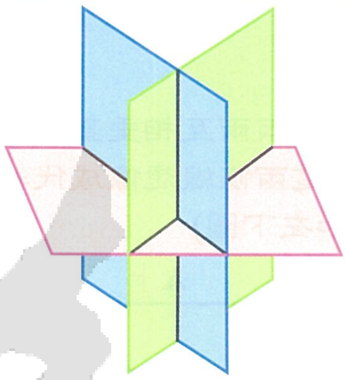
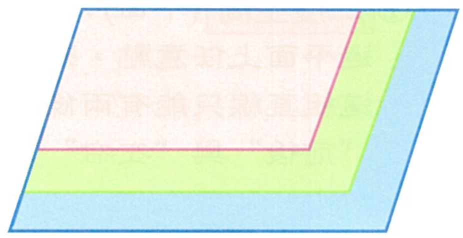
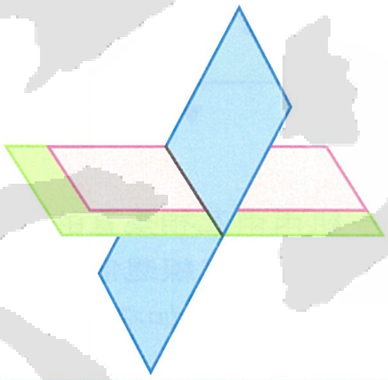
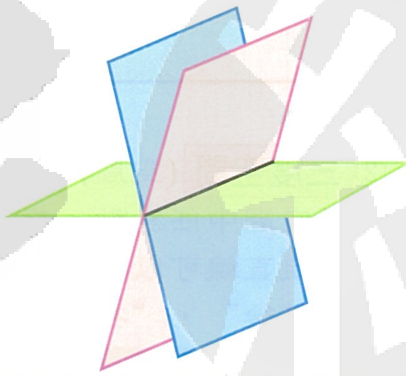
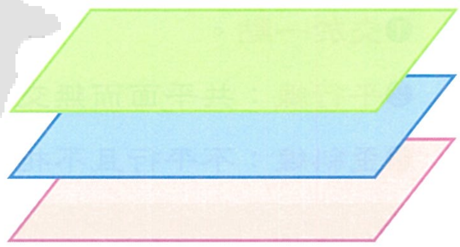
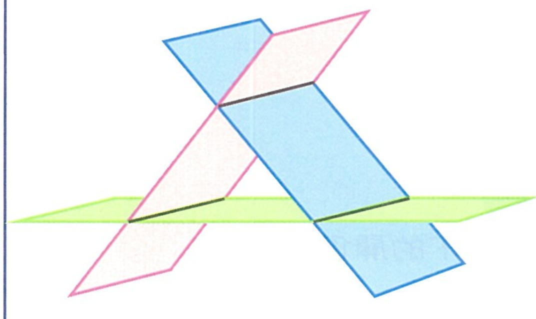
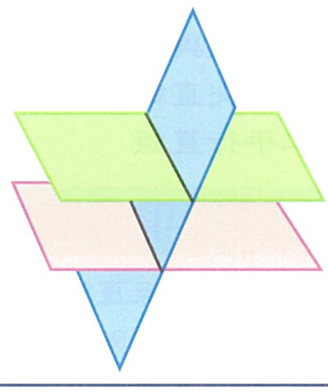
❸直線在平面上⇨只要直線有二相異點在平面上，則此直線會在此平面上

二平面之間的關係

空間中，二個平面有如下的關係

1. 平行⇨二個平面沒有交點
2. 相交⇨二個平面交於一直線
3. 重合⇨二個平面爲一個相同平面

三平面之間的關係

三平面交於一點	三平面重合
	
二平面重合與第三平面交於一線	三平面交於一線
	
二平面重合與第三平面平行	二二平行
	
二二交於一線，交線二二平行	二平面平行與第三平面各交一線
	

空間中的垂直

❶給定一直線 L 及線外一點 P，恰有一直線通過 P 點且垂直於 L

❷給定一直線 L 及線上一點 A，有無限多條直線通過 A 點且與直線 L 垂直，而且這些垂直線構成一個平面

⇨這就是 **直線與平面垂直的定義**

直線與平面的垂直

① **性質**

已知直線 L 與平面 E 垂直於 A 點，則

直線 L 與平面上所有過 A 點的直線都垂直

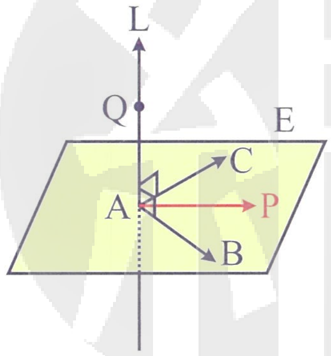
② **判斷**

已知直線 L 與平面 E 相交於 A 點

只要在平面 E 上找到二條過 A 點的相異直線與 L 垂直，

就可以判定直線 L 與平面 E 垂直

立航心得語



【證明】▶(1)如圖所示，直線 L 與平面 E 相交於 A 點，

L 上有異於 A 的一點 Q，

而且在平面上有二條直線 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{AC}$ 都與直線 L 垂直

即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AQ}$

(2)假設 P 點爲平面 E 上的任意一點，

則 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，其中 $\alpha,\beta\in R$

且 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AQ}$

$=\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}+\beta\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$

$\therefore\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{AQ}$

表示平面上所有過 A 點的直線都與直線 L 垂直，

故 $L\perp E$

《心得筆記》

聯考試題

1. 下列哪些敘述是正確的？
(A)在平面上，若兩相異直線不相交，則它們必平行
(B)在空間中，若兩相異直線不相交，則它們必平行
(C)在平面上，任意兩相異直線一定有公垂線(仍在該平面上)
(D)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線
(E)在空間中，相交的兩相異平面一定有公垂面
(公垂面是指與該兩平面都垂直的平面)【87 年文法商】

立航心得語

分析空間中的立體性質，可使用
⇨①
②
③

【答案】▶(A)(D)(E)

【解析】▶

隨堂試試

下列敘述何者為真？
(A)平行於同一平面的二相異直線，互相平行
(B)垂直於同一直線的二相異直線，互相平行
(C)若一平面與二平行平面相交，則其交線互相平行
(D)分別在二個平行平面上的二條直線必互相平行
(E)空間中任意二條相異直線，若不是歪斜線就必定共平面

⇨(C)(E)　【建國中學】

聯考試題

2. 三相異平面兩兩相交於三條相異直線 l_1、l_2、l_3。試問下列選項哪些絕不可能發生？ (1) l_1、l_2、l_3 三線共交點 (2) l_1、l_2、l_3 不共面，但 $l_1 // l_2 // l_3$ (3) l_1、l_2、l_3 共平面 (4) l_1、l_2、l_3 兩兩相交，但三交點相異 (5) l_1、l_2、l_3 三線中兩兩都是歪斜線　【91 年學測補考】

【答案】▶(3)(4)(5)

【解析】▶

隨堂試試

1. 在空間中，下列敘述何者正確？ (A)過直線外一點，恰有一直線垂直此直線 (B)過直線外一點，恰有一直線平行此直線 (C)過平面外一點，恰有一直線垂直此平面 (D)過平面外一點，恰有一直線平行此平面 (E)過直線上一點，恰有一直線垂直此直線

⇨(A)(B)(C)　【高雄中學】【北一女中】

2. 若 A、B、C、D 為不共面四點，則到這四個點均等距離的平面有幾個？

⇨7 個　【台南一中】

必讀！必讀！重要！重要！必讀！必讀！重要！重要！必讀！必讀！重要！重要！

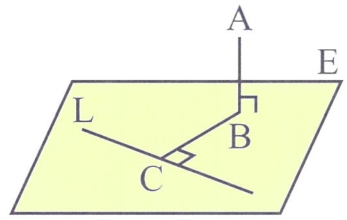
講道理 ➚ 道理說清楚，就是好的開始

分析立體圖形最關鍵的事就是先確認圖形中的平行與垂直之關係。這兒要介紹一個超級好用的定理—三垂線定理，請！

三垂線定理

設直線 AB 與平面 E 垂直於 B 點，在平面 E 上，
直線 BC 與直線 L 垂直於 C 點，
則直線 AC 也與直線 L 垂直於 C 點

立航心得語



記憶 ⇨就利用 三垂線定理的圖形 幫助記憶

證明 ⇨1°在直線 L 上任取二點 P、Q，使得 C 是 $\overline{PQ}$ 的中點

於是，在平面 E 上，BC 是 $\overline{PQ}$ 的垂直平分線

2°在 ΔABP 與 ΔABQ 中，$\overline{BP}=\overline{BQ}$，$\overline{AB}=\overline{AB}$，

$\angle ABP=\angle ABQ=90°$，故 $\Delta ABP\cong\Delta ABQ$(S.A.S)

3°在 ΔAPQ 中，$\overline{AP}=\overline{AQ}$，$\overline{CP}=\overline{CQ}$，

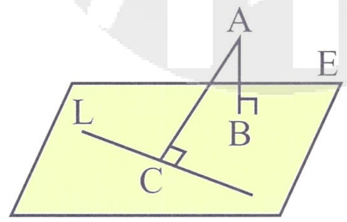
所以 $\overline{AC}$ 是等腰 ΔAPQ 在底邊上的中線

於是，$\overline{AC}\perp\overline{PQ}$，亦即直線 AC 與直線 L 垂直

三垂線逆定理

設直線 AB 與平面 E 垂直於 B 點，
且直線 AC 與平面 E 上的直線 L 垂直於 C 點，
則在平面 E 上，直線 BC 也與直線 L 垂直於 C 點

立航心得語



記憶 ⇨就利用 三垂線逆定理的圖形 幫助記憶

證明 ⇨在 L 上取一點 K，且連接 $\overline{AK}$ 與 $\overline{BK}$

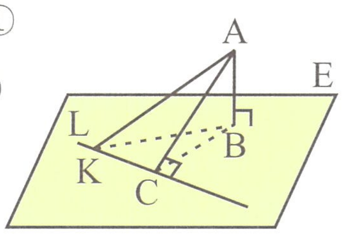
在 ΔACK 中，$\overline{AK}^2=\overline{AC}^2+\overline{KC}^2\cdots$①

在 ΔABC 中，$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2\cdots$②

由①+②：$\overline{AK}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{KC}^2$

$\therefore\overline{BC}^2+\overline{KC}^2=\overline{AK}^2-\overline{AB}^2=\overline{BK}^2$

可得 $\angle BCK=90°$，故 $\overline{BC}\perp\overline{KC}$ 得證



三垂線定理的要訣

通常在題目中看到

□ 的條件，

就應想到可能要使用“三垂線定理”